

«Региональная система оценки качества образования в свете результатов государственной итоговой аттестации»

Владивосток

22 ноября 2018



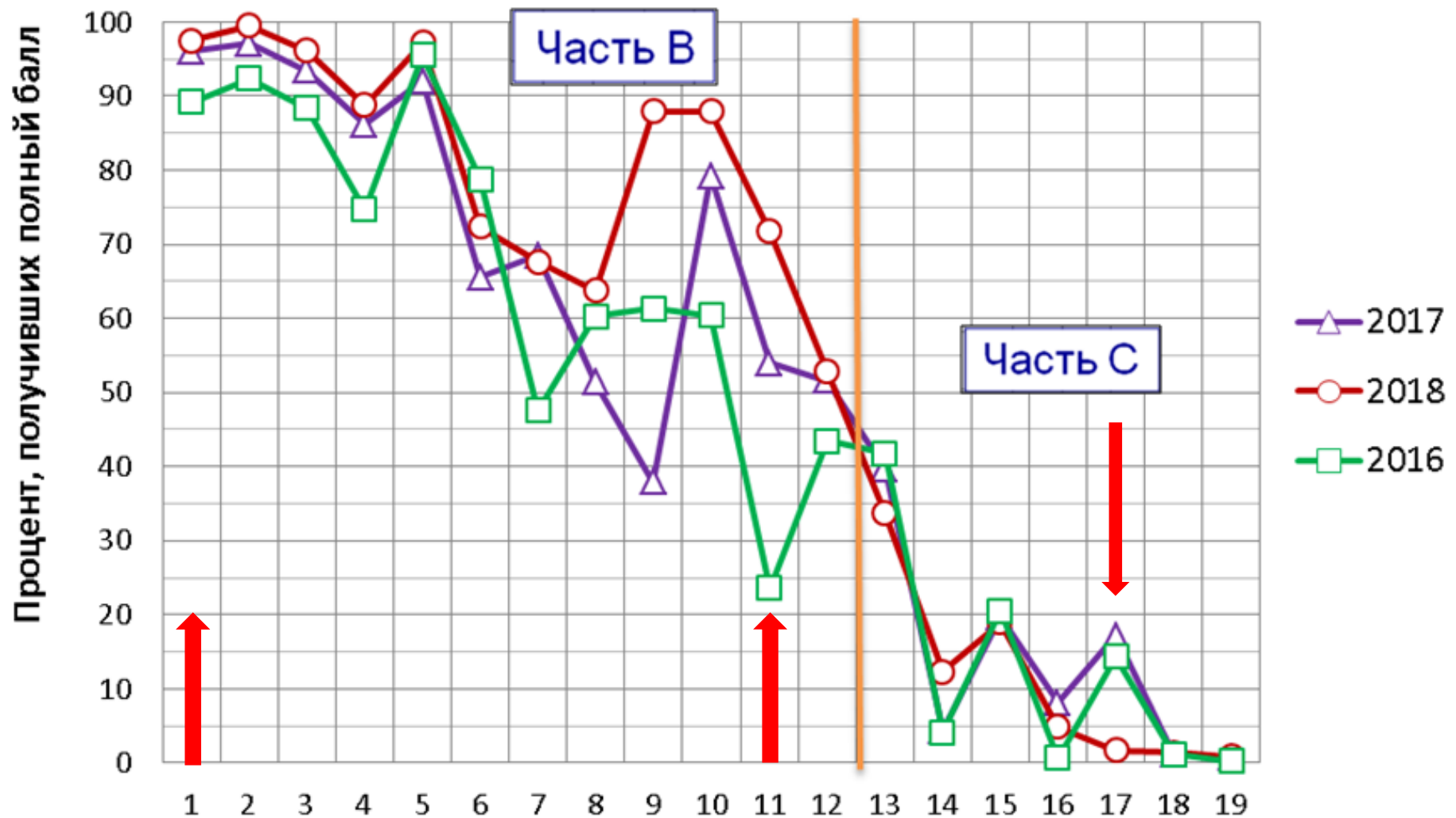
Методические аспекты подготовки учащихся к решению текстовых задач

ПРОКОФЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

Заведующий кафедрой «Высшей математики» НИУ МИЭТ,
учитель математики школы № 1298 «Профиль Куркино» г. Москвы

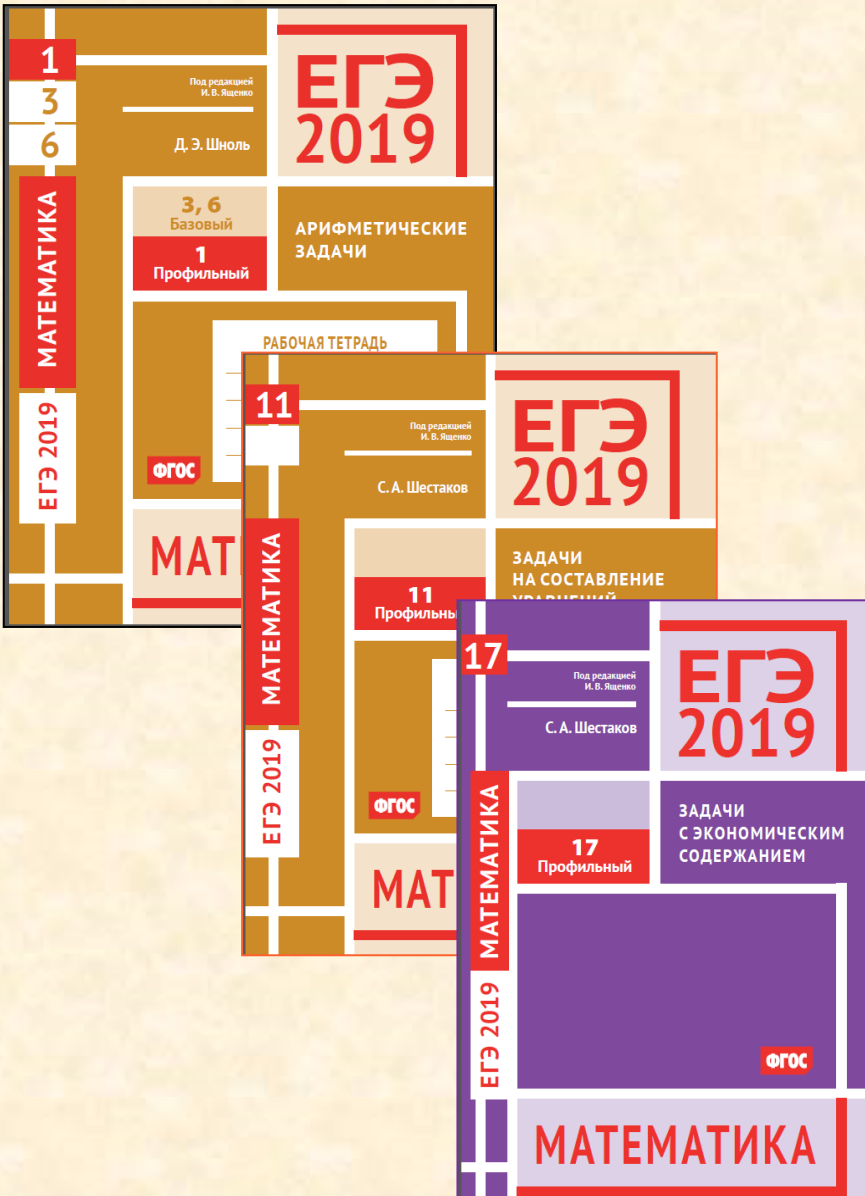
Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016-2018 гг.

Сравнение итоговых результатов экзаменов по математике
профильного уровня в 2016-2018 гг.





Литература



Математика ЕГЭ 2014 (система задач из открытого банка заданий)

Материалы подготовили:
Корянов А. Г. (г. Брянск); e-mail: akorjanov@mail.ru
Надежкина Н.В. (г. Иркутск); e-mail: nadezhkina@yahoo.com

СОДЕРЖАНИЕ



Введение	1
I. Задачи на движение	2
1. Движение по прямой дороге	3
2. Движение по замкнутой дороге	8
3. Движение по реке	9
4. Движение протяженных тел	13
5. Средняя скорость	15
II. Задачи на работу	16
1. Явный объем работы	16
2. Неявный объем работы	19
III. Задачи на проценты	21
1. Части и проценты	21
2. Процентное сравнение величин	22
3. Сложные проценты	23
IV. Задачи на концентрацию	25
V. Задачи на арифметическую прогрессию	28
VI. Задачи на геометрическую прогрессию	31
Дополнительные задачи	31
Решения заданий-прототипов	46
Ответы	66
Список и источники литературы	68



Вводная часть

Текстовые задачи на составление уравнений или неравенств традиционно присутствуют в вариантах ОГЭ и ЕГЭ (задания 1, 11, 17). Как правило, в этих задачах описывается определенный процесс и требуется найти ту или иную величину, заданную условием задачи. Для этого приходится составлять **математическую модель задачи**, т.е. представлять заданные ситуации в виде математических формул (уравнений или неравенств).

Порядок решения текстовых задач обычно содержит следующие этапы:

- выбор неизвестных,
- составление уравнений (или неравенств),
- решение, полученных уравнений (или неравенств),
- проверка и исследование.



Вводная часть

Если при решении получается, что число уравнений, которые удастся составить, меньше числа неизвестных, то нужно обратить внимание на следующее:

- **не введены ли лишние неизвестные**, которые не требуется находить, а их введение не облегчает решение задачи;
- **действительно ли необходимо находить все введенные неизвестные** – может быть по условию задачи нужно найти отношение (или другую комбинацию) некоторых из них, и составленные уравнения позволяют это сделать;
- **не учтено некоторое условие**, которое не может быть записано в виде уравнения, но из соображений здравого смысла накладывающее ограничения на искомые величины (целочисленность и др.).



Вводная часть



При составлении уравнений необходимо следить за тем, чтобы все переменные и исходные данные были представлены в **единой системе размерностей** и все единицы измерения оставались одинаковыми на протяжении всего решения для всех объектов задачи (время, скорости, пройденные отрезки пути и т.д.).



1. Задачи на количественные соотношения



Задачи на количественные соотношения.

Пример 1. Товар продавался в течение двух дней: в первый день по цене 20 руб. за 1 кг, а во второй – 90 руб. за 1 кг. Какая часть общей выручки была получена за товар в первый день, если средняя цена товара оказалась равной 60 руб. за 1 кг?

Решение. Пусть x (кг) товара было продано в первый день, а y (кг) – во второй. Тогда выручка за первый день составила $20x$ руб., а за второй – $90y$ руб. Средняя цена товара за оба дня равна $\frac{20x + 90y}{x + y}$. По условию средняя цена равна 60 руб. за 1 кг. Следовательно, получаем уравнение

$$\frac{20x + 90y}{x + y} = 60 \text{ или } 20x + 90y = 60x + 60y, \text{ т. е. } 4x = 3y.$$

Доля выручки за первый день равна

$$\frac{20x}{20x + 90y} = \frac{5 \cdot 4x}{5 \cdot 4x + 90y} = \frac{5 \cdot 3y}{5 \cdot 3y + 90y} = \frac{15}{105} = \frac{1}{7}. \quad \text{Ответ. } \frac{1}{7}.$$



Задачи на количественные соотношения.

Пример 2. Площади трех участков земли относятся как $4 : 3 : 5$. Урожайность всех трех участков одинакова и составляет 28 центнеров с гектара. Известно, что со второго и третьего участков вместе было собрано на 336 центнеров больше, чем с первого. Найти площадь каждого из участков.

Решение. Пусть S_1, S_2, S_3 – искомые площади участков (га). По условию задачи $S_1 = 4k$, $S_2 = 3k$ и $S_3 = 5k$.

Количество зерна, собранного с каждого участка, составит соответственно

$$P_1 = 28S_1 = 112k, P_2 = 28S_2 = 84k \text{ и } P_3 = 28S_3 = 140k.$$

По условию $P_2 + P_3 = P_1 + 336$ или $84k + 140k - 112k = 336$, т. е. $112k = 336$ или $k = 3$. Следовательно, $S_1 = 12$, $S_2 = 9$ и $S_3 = 15$ (га).

Ответ. 12, 9 и 15 (га).



Задачи на количественные соотношения.

Пример 3. Из двух жидкостей, плотности которых равны $1,2 \text{ г/см}^3$ и $1,6 \text{ г/см}^3$, составлена смесь массой 60 г . Сколько граммов каждой жидкости в смеси и какова плотность смеси, если ее 8 см^3 имеют такую же массу, как масса всей менее плотной из смешанных жидкостей?

Решение. Пусть было взято x граммов жидкости с плотностью $1,2 \text{ г/см}^3$ и y – с плотностью $1,6 \text{ г/см}^3$. По условию задачи $x + y = 60$. Выразим объемы исходных жидкостей. Объем первой равен $\frac{x}{1,2} \text{ см}^3$, второй – $\frac{y}{1,6} \text{ см}^3$, объем смеси – $\frac{x}{1,2} + \frac{y}{1,6} \text{ см}^3$ и плотность смеси – $\frac{60}{\frac{x}{1,2} + \frac{y}{1,6}} \text{ г/см}^3$. Тогда второе условие (про массу 8 см^3 смеси) запишется уравнением:



Задачи на количественные соотношения.

$$8 \cdot \frac{60}{\frac{x}{1,2} + \frac{y}{1,6}} = x \quad \text{или} \quad x \cdot \left(\frac{x}{1,2} + \frac{y}{1,6} \right) = 480.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 60, \\ x \cdot \left(\frac{x}{1,2} + \frac{y}{1,6} \right) = 480. \end{cases}$$

Выразив y из первого уравнения и подставив во второе, получим $x^2 + 180x - 2304 = 0$. Отсюда $x = 12$ и $x = -192$ (но $x > 0$). Тогда $y = 48$. Плотность смеси равна $\frac{60}{\frac{12}{1,2} + \frac{48}{1,6}} = \frac{60}{10 + 30} = 1,5 \text{ г/см}^3$.

Ответ: 12 г менее и 48 г более плотной, плотность смеси $1,5 \text{ г/см}^3$.



Задачи на количественные соотношения.

К подобным задачам можно отнести и задачи с физическим содержанием из ЕГЭ-2010, в которых, как правило, в данную физическую формулу необходимо подставить числовые данные и оценить получившееся значение.

Пример 4. ЕГЭ-2010. Прототип задания В10 (№ 27962). *Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин², $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.*



Задачи на количественные соотношения.

Решение. Подставляя числовые данные в формулу зависимости температуры (в градусах Кельвина) от времени, получим $T(t) = 1400 + 200t - 10t^2$. Прибор должен быть отключен в момент времени t_0 , когда $T(t_0) = 1760$ и при переходе через t_0 температура превысит 1760 K . Решаем неравенство

$$\begin{aligned} 1400 + 200t - 10t^2 > 1760 &\Leftrightarrow 10t^2 - 200t + 360 < 0 \\ t^2 - 20t + 36 < 0 &\Leftrightarrow (t - 2)(t - 18) < 0 \Leftrightarrow t \in (2; 18). \end{aligned}$$

Следовательно, прибор будет работать на промежутке времени получаем $t \in [0; 2]$, а далее при $t_0 = 2$ мин он должен быть отключен. Так как иначе он может испортиться.. **Ответ.** 2 мин.



**2. Задачи на движение;
задачи на наполнение (опорожнение)
объемов;
задачи на работу и производительность**



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Отметим, что методика решения задач этого типа одинакова как для задач на движение, так и для задач на наполнение (опорожнение) объемов и на выполнение работы. По условию во всех этих задачах происходит некоторый (чаще всего) линейный пространственно-временной процесс.

Табл. 1

	Путь, количество выполняемой работы, объем	скорость или производительность	время	Уравнение связи
Задачи на движение	S – пройденный путь	v – путь, проходимый в единицу времени (скорость движения)	t	$S = vt$
Задачи на работу	A – выполненная работа	v – количество работы, выполняемой в единицу времени (производительность)	t	$A = vt$
Задачи на наполнение объемов	V – заполняемый объем	v – объем, поступающий в единицу времени (производительность);	t	$V = vt$



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Для получения полной системы уравнений, описывающей заданный процесс, используется подход, заключающийся в составлении уравнений «движения» во всех описанных ситуациях для каждого участника. К ним добавляются уравнения связи или другие соотношения в соответствии с условиями задачи.

В задачах этого раздела в качестве неизвестных величин удобнее брать расстояния и скорости участников движения (объемы и производительности, всю работу и производительности), реже – время. При этом **не следует пытаться обойтись небольшим числом переменных**. Важно, чтобы легче составлялись уравнения.

Полученные ответы необходимо проверить, так как в ходе решения могли появиться лишние варианты. При получении единственного ответа в стандартной текстовой задаче проверка не требуется.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

При решении задач на движение полезно составить иллюстративный чертеж, т. е. изобразить каждую из описанных в условии ситуаций на схеме, указав направления движения и скорости участников, а также отметив пройденные ими расстояния. Это поможет составить уравнения.

Пример 1. (МИЭТ, 2002, июль, №4 из 11). Из пунктов А и В, расстояние между которыми 55 км, одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и автомобилист. Через полчаса они встретились. Найти скорости мотоцикла и автомобиля, если известно, что скорость автомобиля на 20 % больше скорости мотоцикла.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

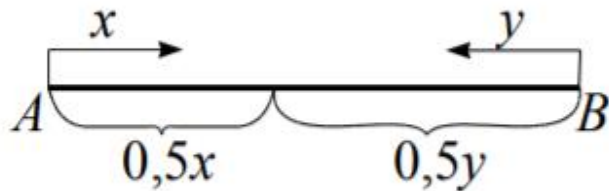


Рис. 1

Решение. Пусть скорость мотоцикла x (км/ч), а скорость автомобиля y (км/ч). Тогда разность $y - x$ составляет по условию 20% от x . Получаем уравнение $y - x = 0,2x$. До точки встречи мотоцикл проехал $0,5x$

км, автомобиль – $0,5y$ км (рис. 1). Сумма этих расстояний равна расстоянию между пунктами A и B , т. е. 55 км. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 0,2x, \\ 0,5x + 0,5y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50, \\ y = 60. \end{cases} \quad \text{Ответ. } 50 \text{ и } 60 \text{ (км/ч).}$$



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 2. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За какое время второй рабочий изготовит 90 деталей, если работая вместе, они изготавливают за один час 30 деталей.

Решение. Пусть n_1 и n_2 – число деталей, изготавливаемых первым и вторым рабочими за 1 час. Примем, что $n_1 > n_2$.

Совместно за 1 час они производят 30 деталей или $n_1 + n_2 = 30$.

На изготовление 60 деталей первый затратил $\frac{60}{n_1}$ часа, а второй

$\frac{60}{n_2}$ или на 3 часа больше. Значит $\frac{60}{n_2} - \frac{60}{n_1} = 3$.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Объединим уравнения в систему
$$\begin{cases} n_1 + n_2 = 30, \\ \frac{60}{n_2} - \frac{60}{n_1} = 3. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $n_1 = 30 - n_2$ и подставим во второе.

Тогда $\frac{60}{n_2} - \frac{60}{30 - n_2} = 3$ или $n_2^2 - 70n_2 - 600 = 0$. Откуда

$n_2 = 35 \pm 25$. Так как по условию $n_2 < 30$, то $n_2 = 10$ и, следовательно, 90 деталей второй рабочий изготовит за 9 часов.

Ответ: 9 часов.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 3. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

Решение. (1-й способ). Пусть V_1 и V_2 м^3 – объемы первого и второго танкеров, а v $\text{м}^3/\text{час}$ – производительности насосов. При совместной работе общая производительность насосов будет $4v$ $\text{м}^3/\text{час}$. Из условия задачи (о наполнении за 11 часов) получим уравнение:

$$\frac{V_1 + \frac{1}{3}V_2}{4v} = 11 \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \frac{V_1}{v} + \frac{1}{12} \frac{V_2}{v} = 11. \quad (1)$$



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Из условия задачи (о наполнении за 18 часов) получим:

$$\frac{V_1}{3v} + \frac{\frac{1}{4}V_2}{v} = 18 \quad \text{или} \quad \frac{1}{3} \frac{V_1}{v} + \frac{1}{4} \frac{V_2}{v} = 18. \quad (2)$$

Время наполнения тремя насосами второго танкера равно $\frac{V_2}{3v}$.

Из уравнения (1) выразим $\frac{V_1}{v} = 44 - \frac{1}{3} \frac{V_2}{v}$ и подставим его в (2)

$$\frac{1}{3} \left(44 - \frac{1}{3} \frac{V_2}{v} \right) + \frac{1}{4} \frac{V_2}{v} = 18.$$

Следовательно, время наполнения одним насосом второго танкера $\frac{V_2}{v} = 24$. Отсюда искомое время равно $\frac{V_2}{3v} = 8$ часов.

Ответ: 8 часов.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

(2-й способ). Пусть t_1 и t_2 (час) – время, необходимое для заполнения первого и второго танкеров одним насосом. Записав уравнения, соответствующие условиям задачи, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{t_1}{4} + \frac{t_2}{12} = 11, \\ \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{4} = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t_1 + t_2 = 132, \\ 4t_1 + 3t_2 = 216 \end{cases} \Leftrightarrow t_2 = 24.$$

Отсюда искомое время равно $\frac{t_2}{3} = 8$.

Ответ: 8 часов.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 4. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 100 км, выехали одновременно с одинаковой скоростью два мотоциклиста. Через 30 мин после начала движения у одного из них случился прокол. Второй мотоциклист продолжил движение, а первый остановился и на замену колеса потратил 15 мин. После этого он продолжил движение, увеличив скорость на 10 км/час, и прибыл в пункт В одновременно со вторым мотоциклистом. Определить время, за которое они преодолели путь из А в В.

Решение. Пусть x км/час – первоначальная скорость мотоциклистов. Тогда $0,5x$ км – путь, пройденный первым из них до остановки (здесь $30 \text{ мин} = 0,5 \text{ час}$). Второй двигался с постоянной скоростью и на весь путь затратил $t_2 = \frac{100}{x}$ час. Первому от



Задачи на движение, наполнение объемов ...

места прокола до пункта B оставалось проехать $(100 - 0,5x)$ км. С учетом остановки на $15 \text{ мин} = 0,25 \text{ часа}$ он находился в пути

$$t_1 = \left(0,5 + 0,25 + \frac{100 - 0,5x}{x + 10} \right) \text{ час.}$$

По условию $t_1 = t_2$ (в пункт B они приехали одновременно), или

$$\frac{100}{x} = 0,75 + \frac{100 - 0,5x}{x + 10}.$$

Отсюда $0,25x^2 + 3,25x - 4000 = 0$. Получаем $x = 50$ или $x = -80$. Так как $x > 0$, то $x = 50 \text{ км/час}$. Время движения из пункта A в пункт B равно $\frac{100}{x} = \frac{100}{50} = 2 \text{ часа}$. **Ответ:** 2 часа.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

При равномерном движении тел, находящихся первоначально на расстоянии S , навстречу друг другу или в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 для вычисления времени встречи используются формулы:

а) $t = \frac{S}{v_1 + v_2}$ – при движении тел навстречу друг другу;

б) $t = \frac{S}{v_1 - v_2}$ – при движении в одну сторону при $v_1 > v_2$.

Формула (а) применяется и в задачах на совместное выполнение работы, и наполнение (опорожнение) объемов.

Рассмотрим следующую задачу (в общем виде).

Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 5. *Два пешехода выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Известно, что первый из них преодолевает расстояние между пунктами за время t_1 , второй – за время t_2 . Определить время t_3 их встречи с момента начала движения.*

Решение. Пусть расстояние между пунктами равно S . Тогда первый пешеход движется со скоростью $v_1 = \frac{S}{t_1}$, второй – со скоростью $v_2 = \frac{S}{t_2}$. Так как при движении навстречу друг другу они встретятся через время $t_3 = \frac{S}{v_1 + v_2}$, то $t_3 = \frac{S}{v_1 + v_2} = \frac{S}{\frac{S}{t_1} + \frac{S}{t_2}} = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}$.

Из последней формулы получаем

$$t_3 = \frac{t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}, \quad t_1 = \frac{t_3 \cdot t_2}{t_2 - t_3} \text{ и } t_2 = \frac{t_3 \cdot t_1}{t_1 - t_3}.$$



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 6. Бак наполняется двумя кранами А и В. Наполнение бака только через кран А длится на 22 мин дольше, чем наполнение только через кран В. Если же открыть оба крана, то бак наполнится через 1 час. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?

Решение. Пусть t_A и t_B (час) – время, необходимое для заполнения бака только через кран А и В соответственно. Условия задачи позволяют составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} t_A - t_B = \frac{11}{30}, \\ \frac{t_A \cdot t_B}{t_A + t_B} = 1. \end{cases}$$

Решив ее, получаем: $t_A = 2$ часа 12 мин, $t_B = 1$ час 50 мин.

Ответ: 2 час 12 мин и 1 час 50 мин.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 7. (МИЭТ, 2004, июль, №8 из 11). Из пункта А по направлению в сторону пункта В выехали автомобиль и мотоциклист. Одновременно с ними из пункта В в том же направлении выехал велосипедист. Автомобиль догнал велосипедиста и сразу же повернул назад. Проехав четверть своего обратного пути, автомобиль встретил мотоциклиста и вернулся в пункт А в тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста. Найти отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста.

Решение. (1-й способ). Обозначим скорости автомобиля, мотоциклиста и велосипедиста v_a , v_m и v_v соответственно, S – расстояние от А до В.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

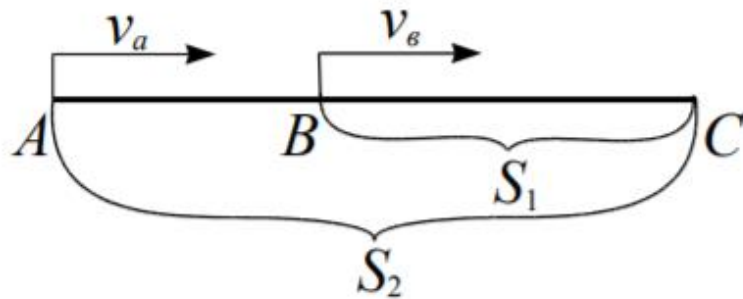


Рис. 2

Пусть автомобиль догнал велосипедиста в точке C в момент времени t_1 , S_1 – расстояние от B до C , S_2 – расстояние от A до C (рис. 2). Тогда получаем уравнения: $S_1 = v_v \cdot t_1$, $S = S_2 - S_1$,

$$S_2 = v_a \cdot t_1, \quad (1)$$

$$S_1 = (v_a - v_v) \cdot t_1. \quad (2)$$

Пусть автомобиль встретил мотоциклиста в точке D через время t_2 после поворота (рис. 3). В этом случае автомобиль проехал расстояние от C до D , равное $\frac{1}{4}S_2$ за время t_2 , а мотоциклист проехал расстояние от A до D , равное $S_2 - \frac{1}{4}S_2 = \frac{3}{4}S_2$ за время $t_1 + t_2$. Получаем уравнения:

Задачи на движение, наполнение объемов ...

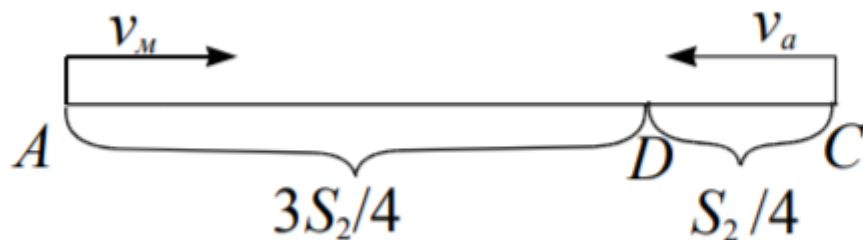


Рис. 3

$$\frac{1}{4}S_2 = v_a \cdot t_2, \quad (3)$$

$$\frac{3}{4}S_2 = v_m \cdot (t_1 + t_2). \quad (4)$$

Автомобиль вернулся в пункт A через время $2t_1$ после начала движения, и в этот момент мотоциклист догнал велосипедиста в некоторой точке E (рис. 4). Пусть расстояние от B до E равно S_3 , расстояние от A до E равно S_4 . Получаем уравнения:

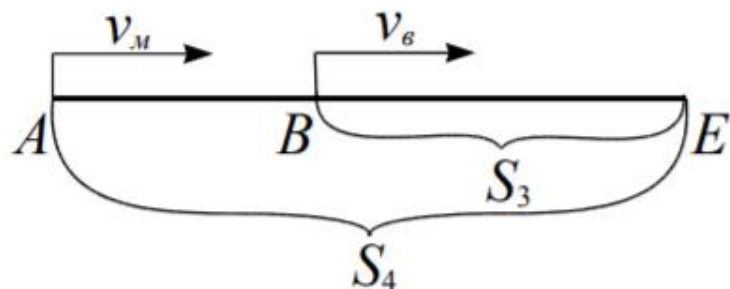


Рис. 4

$$S_3 = 2v_в t_1,$$

$$S_3 = 2v_в t_1,$$

$$S = S_4 - S_3,$$

$$S = (v_m - v_в) \cdot 2t_1. \quad (5)$$

Объединив уравнения (1), (2), (3), (4), (5) в систему и решив ее, най-

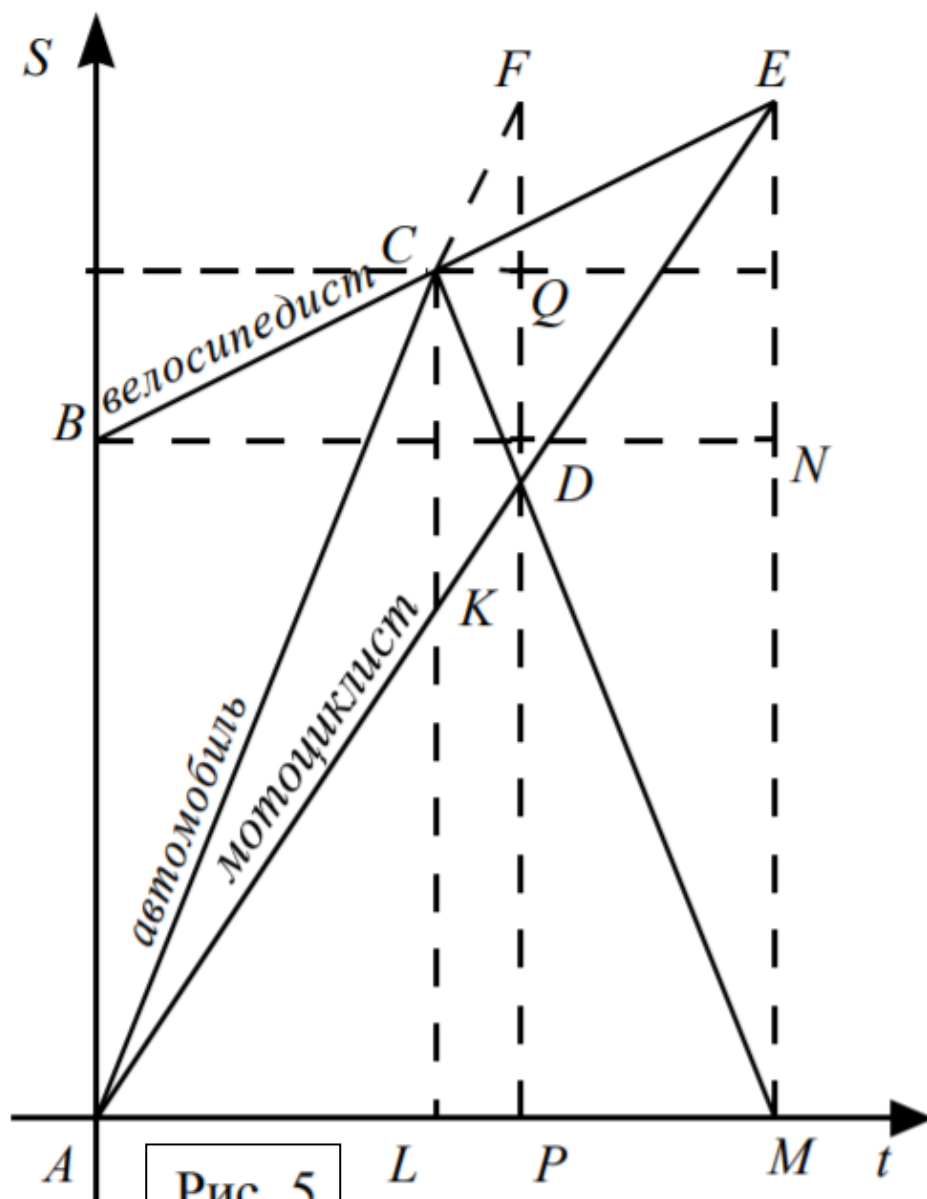
дем $v_m = 3v_в$.

Ответ. 3.

Решение. (Второй способ – графический). Изобразим графики

движения автомобиля, мотоциклиста и велосипедиста в одной системе координат (рис. 5).

Отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста равно отношению $EM : EN$. При этом $EN = EM - AB$. Заметим, что CK является средней линией $\triangle BEA$, KL является средней линией $\triangle EAM$. Следовательно, $AB = 2CK$, $EM = 2KL$. Продолжим прямую AC до пересечения с прямой PD в точке F , $CF = CD$. Тогда





Задачи на движение, наполнение объемов ...

$$CK : KL = FD : DP = \\ = 2QD : DP = 2 : 3,$$

так как по условию $QD : QP = 1 : 4$, следовательно, $QD : DP = 1 : 3$.

Таким образом, $CK = \frac{2}{3}KL$, $AB = \frac{4}{3}KL$, $EN = 2KL - \frac{4}{3}KL = \frac{2}{3}KL$,

$$EM : EN = 2KL : \frac{2}{3}KL = 3.$$

Отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста равно 3.

Ответ. 3.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пример 8. (МИЭТ, 2003, июль, № 11 из 11). Из пункта А в пункт В с интервалом 10 минут выехали 24 велосипедиста, каждый из которых затратил на весь путь 5 часов. Одновременно с ними из пункта В в пункт А выезжали мотоциклисты, каждый из которых затратил на весь путь одинаковое время. В пути произошло 498 встреч (без учета встреч в пунктах А и В). Какие значения может принимать время нахождения в пути каждого мотоциклиста?

Решение. Изобразим графики движения велосипедистов и мотоциклистов на одной координатной плоскости, учитывая, что последние велосипедист и мотоциклист выехали через 230 минут после старта первых, т.е. в момент времени $t = 230$, а первый велосипедист в это время в пункт В еще не приехал (рис. 6).



Задачи на движение, наполнение объемов ...

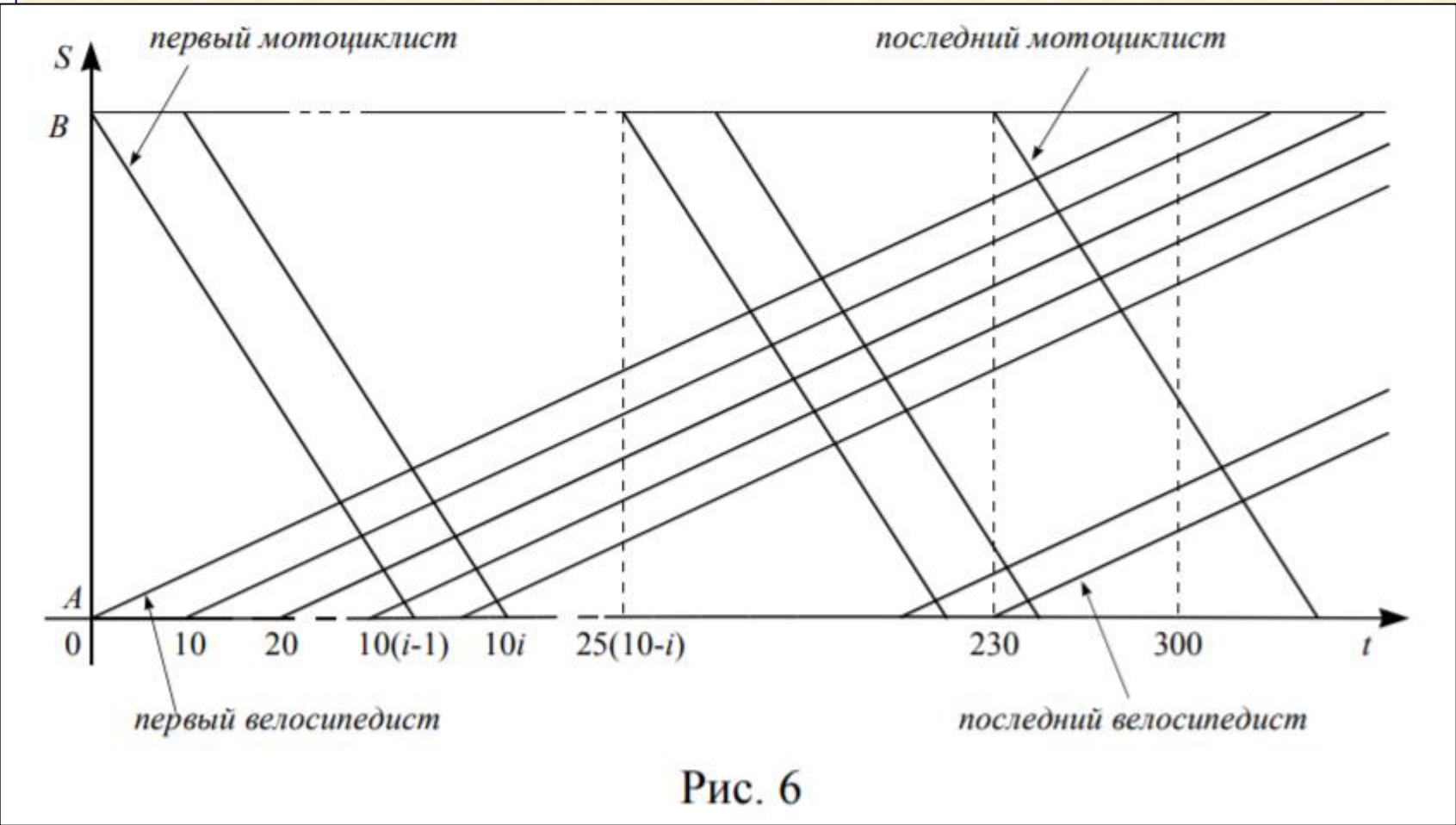


Рис. 6

Замечание. Графики движений будем изображать прямыми линиями, т. е. предполагая, что их скорости постоянны. На самом деле, зависимости координаты от времени для мотоциклистов являются непрерывными возрастающими функциями, для велосипедистов – непрерывными убывающими функциями, но на ход решения это не влияет.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Пусть первый мотоциклист в пути встречает i велосипедистов. Тогда время τ нахождения в пути этого (а значит, и любого другого) мотоциклиста удовлетворяет неравенству $10(i-1) < \tau \leq 10i$.

Заметим, что **первый мотоциклист не может встретить всех велосипедистов**, так как в этом случае каждый мотоциклист встретил бы всех велосипедистов, и количество встреч было бы равно $24^2 = 576$, что противоречит условию. Второй мотоциклист встретит $i+1$ велосипедиста, третий – $i+2$, ..., k -й – $i+k-1$, при условии, что $i+k-1 \leq 24$. Увеличение числа встреч на одну будет продолжаться до тех пор, пока числа $i+1$, $i+2$, ..., $i+k-1$ не станет больше 24. Их количество равно $k = 24 - i + 1 = 25 - i$.



Задачи на движение, наполнение объемов ...

Последний из этих мотоциклистов и все остальные (их количество равно $24 - (25 - i) = i - 1$) будут встречать всех 24-х велосипедистов. Значит, число встреч равно

$$\underbrace{i + (i + 1) + \dots + 23 + 24}_{25-i} + \underbrace{24 + 24 + \dots + 24}_{i-1} = 498$$

$$\text{или } \frac{i + 24}{2} \cdot (25 - i) + 24(i - 1) = 498 \quad \text{или } i^2 - 49i + 444 = 0,$$

т. е. $i = 12$ или $i = 37$ (но $i \leq 24$). Значит $110 < \tau \leq 120$.

Ответ. $(110; 120]$ мин.



Задачи на движение по реке

Пример 9. (МИЭТ, 2004, июнь, №6 из 11). Катер тратит на путь от пункта A до пункта B , расположенного ниже по течению реки, такое же время, как на путь от пункта B до пункта C , расположенного посередине между A и B . Найти отношение скорости катера в стоячей воде к скорости течения реки.

Решение. Пусть S (км) – расстояние от A до B , x (км/ч) – скорость катера в стоячей воде, y (км/ч) – скорость течения реки. Тогда скорость катера при движении по течению реки от пункта A до пункта B равна $x + y$ (км/ч), и расстояние от A до B преодолевается им за $\frac{S}{x + y}$ (часов).



Задачи на движение по реке

По условию задачи расстояние между пунктами B и C равно $\frac{S}{2}$ (км). Двигаясь против течения реки от B до C со скоростью $x - y$ (км/ч), катер затрачивает $\frac{S}{2(x - y)}$ часов. Получаем уравнение $\frac{S}{2(x - y)} = \frac{S}{x + y}$.

Отсюда получаем $2x - 2y = x + y$, $x = 3y$.

Ответ. 3.



Задачи на движение по реке

Пример 10. (МИЭТ, 2000, июль, №6 из 11). Пароход вышел из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, и, дойдя до В, сразу же повернул обратно, затратив на весь путь 5 часов. Сколько времени идет пароход от В до А, если известно, что плоты сплавляются от А до В за 12 часов?

Решение. (1-й способ). Аналогично решению предыдущей задачи (обозначая скорость парохода в стоячей воде x (км/ч), скорость течения реки y (км/ч), а S (км) – расстояние между пунктами А и В, получим в итоге систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{S}{x+y} + \frac{S}{x-y} = 5, \\ S = 12y. \end{cases}$$

из первого уравнения системы получим

$$\frac{2Sx}{x^2 - y^2} = 5 \text{ и } x = 5y. \text{ Тогда искомое время } t = \frac{S}{x-y} = 3 \text{ (часа)).}$$

Решение. (2-й способ). Пусть скорость парохода в стоячей воде x (км/ч), скорость течения реки y (км/ч), S (км) – расстояние между A и B . Введем обозначения: t_1 (ч) – время движения парохода по течению реки на пути из A в B , а t_2 (ч) – время движения парохода против течения на пути из B в A .

По условию задачи $t_1 + t_2 = 5$. Учитывая, что $x + y = \frac{S}{t_1}$ и $x - y = \frac{S}{t_2}$, получим $\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2} = (x + y) - (x - y) = 2y$. Так как $S = 12y$, то из уравнения $\frac{S}{t_1} - \frac{S}{t_2} = 2y$ следует $\frac{6}{t_1} - \frac{6}{t_2} = 1$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{6}{t_1} - \frac{6}{t_2} = 1, \\ t_1 + t_2 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 t_2 = 6(t_2 - t_1), \\ t_1 + t_2 = 5. \end{cases}$$

Отсюда получаем $t_2 = 3$.

Ответ. 3 часа.



Задачи на движение по окружности

При движении по некоторой кольцевой траектории (по окружности, дорожке стадиона и т.д.) длины S двух тел со скоростями v_1 и v_2 при одновременном старте в одну сторону ($v_1 > v_2$) в момент времени t , когда первое тело догонит второе, будет выполняться условие:

$$l = t(v_1 - v_2) \text{ или } t = \frac{l}{v_1 - v_2}, \quad (2.1)$$

где l – первоначальное расстояние между телами вдоль траектории.

При одновременном старте тел навстречу друг другу из одной точки время, через которое они встретятся, равно

$$t = \frac{S}{v_1 + v_2} \text{ или } S = (v_1 + v_2)t. \quad (2.2)$$



Задачи на движение по окружности

Пример 11. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 сек меньше другого. Если они начинают пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 сек. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

Решение. Пусть v_1 и v_2 (м/сек) – скорости спортсменов (для определенности будем считать $v_2 > v_1$). Пусть S (м) – длина дорожки. Тогда первый спортсмен пробегает ее за время $\frac{S}{v_1}$, а второй – за $\frac{S}{v_2}$ или на 5 сек быстрее первого, т. е. $\frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 5$.



Задачи на движение по окружности

Так как при движении с общего старта одновременно в одном направлении они оказываются рядом через 30 сек, то из формулы (2.1) следует $S = 30(v_2 - v_1)$. Получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} \frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 5, \\ S = 30(v_2 - v_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{v_1} - \frac{S}{v_2} = 5, \\ \frac{v_2}{S} - \frac{v_1}{S} = \frac{1}{30}. \end{cases}$$

По формуле (2.2) спортсмены встретятся через $t = \frac{S}{v_1 + v_2} = \frac{1}{\frac{v_1}{S} + \frac{v_2}{S}}$. Обозначая $p_1 = \frac{v_1}{S}$, $p_2 = \frac{v_2}{S}$, получим



Задачи на движение по окружности

$$\begin{cases} \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = 5, \\ p_2 - p_1 = \frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^2 + 5p_1 - 1 = 0, \\ p_2 = \frac{1}{30} + p_1. \end{cases}$$

Отсюда $p_1 = \frac{1}{15}$ и $p_2 = \frac{1}{10}$.

Следовательно, $t = \frac{1}{p_1 + p_2} = 6$ сек.

Ответ: 6 сек.



Задачи на движение по окружности

Пример 12. (МИЭТ, 2004, июль, № 8 из 11). По круговому маршруту из одного и того же места одновременно в разных направлениях выехали велосипедист и мотоциклист. До момента их первой встречи расстояние в 6 км, измеряемое по меньшей из дуг маршрута было между ними дважды: в первый раз через 5 минут после старта, когда велосипедист проехал одну двадцатую часть маршрута, второй раз, когда мотоциклист проехал три пятых части маршрута. Через какое время после старта расстояние в 6 км было между ними во второй раз?

Решение. Пусть v_1 , v_2 (км/ч) – соответственно скорости велосипедиста и мотоциклиста, длина маршрута равна S (км).



Задачи на движение по окружности

Обозначим через t (ч) время с момента старта, через которое расстояние между ними во второй раз станет равным 6 км; через A точку старта, B и C – точки, в которых находились соответственно велосипедист и мотоциклист через 5 мин = $\frac{1}{12}$ час, после старта

(рис. 7). По условию задачи $AB = \frac{1}{20}S$,

$BC = 6$. Получаем:

$$\frac{1}{12}v_1 = \frac{1}{20}S, \quad (1)$$

$$\frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{12}v_2 = 6. \quad (2)$$

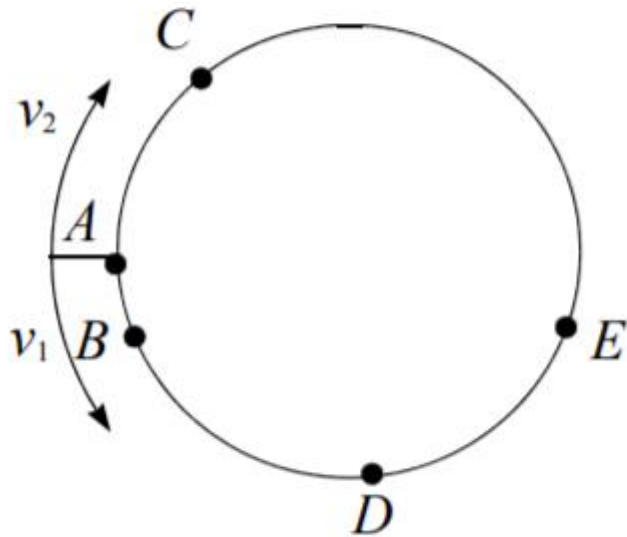


Рис. 7



Задачи на движение по окружности

Обозначим через D и E точки, в которых находились соответственно велосипедист и мотоциклист через t часов после старта, когда второй раз расстояние между ними было 6 км. По условию задачи длина пути AE (через точку C) равна $\frac{3}{5}S$, $AD + AE = S - 6$. Получаем уравнения

$$v_2 t = \frac{3}{5}S, \quad (3)$$

$$v_1 t + v_2 t = S - 6. \quad (4)$$

Найдем t из системы уравнений:



Задачи на движение по окружности

$$\begin{cases} \frac{1}{12}v_1 = \frac{1}{20}S, \\ \frac{1}{12}v_1 + \frac{1}{12}v_2 = 6, \\ v_2t = \frac{3}{5}S, \\ v_1t + v_2t = S - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{5}S, \\ v_1 + v_2 = 72, \\ \frac{5}{3}v_2t = S, \\ 72t + 6 = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{3}{5}S, \\ v_2 = 72 - \frac{3}{5}S, \\ 120t - St = S, \\ 72t + 6 = S. \end{cases}$$

Из системы получаем уравнение относительно t :

$$120t - (72t + 6)t = 72t + 6 \text{ или } 72t^2 + 198t + 6 = 0,$$

корни которого равны $\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{3}$. Следовательно, условию задачи

удовлетворяют два значения t : $t = \frac{1}{4}$ и $t = \frac{1}{3}$ часа.

Ответ. 15 или 20 минут.



Задачи на движение ...

В следующих задачах требуется определить промежуток, в котором лежат искомые значения величин. Это можно сделать либо с помощью решения неравенств или систем неравенств, либо с помощью нахождения множества значений некоторой функции.

Пример 13. (МИЭТ, 2000, апрель, №8 из 11). Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций А и В, расстояние между которыми 600 км. Первый из них приходит на станцию В на 3 часа раньше, чем второй на станцию А. В каких пределах заключено время движения первого поезда, если известно, что скорости поездов отличались более чем на 10 км/ч, а максимальная скорость на перегоне не должна превышать 60 км/ч?



Задачи на движение ...

Решение. Обозначим через t (час) время движения первого поезда от A до B . Тогда время движения второго поезда от B до A равно $(t + 3)$ (час). Расстояние в 600 км первый поезд прошел со скоростью $\frac{600}{t}$ км/ч, а второй $\frac{600}{t + 3}$ км/ч. По условию $\frac{600}{t} \leq 60$. Отсюда следует, что $t \geq 10$.

Кроме того, скорости поездов различались более чем на 10 км/ч, т. е. $\frac{600}{t} - \frac{600}{t + 3} > 10$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{600}{t} - \frac{600}{t + 3} > 10, \\ t \geq 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t + 15)(t - 12) < 0, \\ t \geq 10; \end{cases} \Leftrightarrow 10 \leq t < 12.$$

Ответ: $t \in [10; 12)$.



Задачи на движение ...

Пример 14. (МИЭТ, 2000, №8 из 11). Двое рабочих выполняют некоторую работу. Если первый рабочий проработает 2 часа, а затем они вместе будут работать 3 часа, то они вместе выполнят 75% всей работы. Какие значения может принимать время выполнения всей работы двумя рабочими вместе?

Решение. Пусть p_1 – **удельная производительность труда** первого рабочего (т. е. часть всего объема работы, который он выполняет за час), p_2 – **удельная производительность труда** второго рабочего, t – время выполнения всей работы двумя рабочими



Задачи на движение ...

совместно (в часах). По условию $t(p_1 + p_2) = 1$ и $2p_1 + 3(p_1 + p_2) = 0,75$. Отсюда $p_1 = 0,15 - 0,6p_2$,

$t = \frac{1}{p_1 + p_2} = \frac{1}{0,15 + 0,4p_2}$. По смыслу задачи $p_2 > 0$, $p_1 > 0$, следовательно, $0,15 - 0,6p_2 > 0$, $p_2 < 0,25$. Функция

$t(p_2) = \frac{1}{0,15 + 0,4p_2}$ — непрерывна и убывает на отрезке $[0; 0,25]$.

Следовательно, при $p_2 \in (0; 0,25)$ значения функции $t(p_2)$ удовлетворяют неравенству $t(0,25) < t(p_2) < t(0)$, $4 < t(p_2) < \frac{20}{3}$.

Функция $t(p_2)$ непрерывна и принимает все значения из интервала $\left(4; \frac{20}{3}\right)$.

Ответ. $\left(4; \frac{20}{3}\right)$ час.



3. Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Приведем несколько ключевых фактов, которые можно записать формулой.

1. Факт, что *число a составляет k % от числа b* , записывают формулой: $a = \frac{k}{100} \cdot b$.

Это позволяет в задачах от процентов можно освободиться, переходя к дробям. Например, то, что число a составляет 27 % от b , записывается в виде $a = 0,27b$.

2. Ответ на вопрос о том, *сколько процентов составляет число a от числа b* , дает формула $k = \frac{a}{b} \cdot 100$.

Например, 33 составляет 15% от 220, так как $\frac{33}{220} \cdot 100 = 15$ %.

3. Факт, что *число a , большее числа b на k %*, записывается формулой $a = \left(1 + \frac{k}{100}\right) \cdot b$.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Если **число** a **меньше числа** b **на** $k\%$, то $a = \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot b$.

Например, найдем число x большее 256 на 25 %. Из формулы получим $x = \left(1 + \frac{25}{100}\right) \cdot 256 = 1,25 \cdot 256 = 320$.

4. Пусть требуется найти, **в каком процентном соотношении находятся числа** a , b **и** c . В этом случае следует определить, какой процент составляет каждое число по отношению к сумме этих чисел. Пусть k_a , k_b и k_c – искомые проценты, тогда

$$k_a = \frac{a}{a+b+c} \cdot 100, \quad k_b = \frac{b}{a+b+c} \cdot 100, \quad k_c = \frac{c}{a+b+c} \cdot 100.$$



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 1. (ЕГЭ-2009). Зимой цена на говядину снизилась на 12.5% по сравнению с осенью. На сколько процентов больше нужно продать говядины зимой, чтобы выручка от ее продажи увеличилась на 5% по сравнению с осенью?

Решение. Пусть осенью и зимой продано x и x_1 (кг) говядины по цене y и y_1 (руб/кг), а N и N_1 (руб) – выручка осенью и зимой соответственно.

Согласно условию $N_1 = N\left(1 + \frac{5}{100}\right)$, $y_1 = y\left(1 - \frac{12,5}{100}\right)$. Так как $N = xy$, а $N_1 = x_1y_1$, то получаем

$$x_1y_1 = xy\left(1 + \frac{5}{100}\right) \text{ или } x_1y\left(1 - \frac{12,5}{100}\right) = xy\left(1 + \frac{5}{100}\right).$$

Отсюда получаем $x_1 = x \frac{1,05}{0,875}$ или $x_1 = 1,2x$, т. е. количество проданной говядины должно быть увеличено на 20 %.

Ответ: 20 %.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пусть смесь (сплав, раствор) составлена из нескольких компонентов $A_1, \dots, A_n$, имеющих массы $m_{A_1}, \dots, m_{A_n}$, соответственно. Тогда масса смеси, составленной из них, равна $m = m_{A_1} + \dots + m_{A_n}$.

Массовой концентрацией компоненты A_k ($k = 1, 2, \dots, n$) в смеси называется величина c_{A_k} , выражаемая формулой

$$c_{A_k} = \frac{m_{A_k}}{m} = \frac{m_{A_k}}{m_{A_1} + \dots + m_{A_n}}.$$

При этом верно равенство $c_{A_1} + c_{A_2} + \dots + c_{A_n} = 1$.

Аналогично определяются **объемные концентрации** компонентов $A_1, A_2, \dots, A_n$ в смеси, только вместо масс в формулах используются их объемы $V_{A_1}, V_{A_2}, \dots, V_{A_n}$. Полагается, что получающаяся смесь однородна и ее объем равен сумме объемов компонентов.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Процентным содержанием компонента A_k в данной смеси называется величина $p_{A_k} \%$, вычисляемая по формуле

$$p_{A_k} \% = c_{A_k} \cdot 100 \%$$

При решении задач на концентрацию и проценты, а это обычно задачи на смеси, растворы и сплавы, в качестве неизвестных, как правило, выбираются либо весь вес (объем) компонентов, либо их концентрация в смеси.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 2. (из статьи И.Ф. Шарыгина «Где ошибка?», «Quantum», № 7-8, 1998). Фермер собрал 10 т арбузов и отправил их на барже по реке в ближайший город. Как известно, арбузы почти целиком состоят из воды. В момент отправления содержание воды в них равнялось 99%. За время транспортировки арбузы несколько усохли, содержание воды уменьшилось на 1% (Стало равным 98%.) Чему равна масса арбузов, прибывших в город?

Решение. Составим таблицу, в который каждая клетка с числовыми показателями разделена пополам, и в ней указан масса компонента и его процентное содержание. Масса твердой составляющей при перевозке не меняется. Тогда массу арбузов, прибывших в город, находим из пропорции (см. табл.).



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

	В момент сбора	В момент прибытия	
Вода	9900 кг 99 %	4900 кг 98 %	? кг – 98 % 100 кг – 2 %
Твердая со- ставляющая	100 кг 1 %	100 кг 2 %	Масса не меняется
Арбузы	10000 кг 100 %	5000 кг 100 %	? кг – 100 % 100 кг – 2 %

Ответ: 5 т.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 3. Сплав меди и цинка весом 60 кг содержит 40% меди. Сколько нужно добавить цинка, чтобы в сплаве его концентрация достигла 80%?

Решение. Составим таблицу. Пусть добавлено x кг цинка. Из пропорции $\frac{36 + x}{24} = \frac{80}{20}$ находим $x = \frac{80 \cdot 24}{20} - 36 = 60$ кг (см. табл.).

	Исходный сплав	Новый сплав	
Цинк	36 кг 60 %	$36 + x$ кг 80 %	$36 + x$ кг – 80 % 24 кг – 20 %
Медь	24 кг 40 %	24 кг 20 %	Масса компонента не меняется
Сплав	60 кг 100 %	$60 + x$ кг 100 %	

Ответ: 60 кг.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

В задачах на процентный прирост используются следующие понятия и формулы. Пусть некоторая величина A , меняющаяся со временем, имеет в начальный момент значение A_0 , а через известный промежуток времени t_1 значение A_1 . **Абсолютным приростом величины A** за время t_1 называется разность $A_1 - A_0$, **относительным приростом величины A** за время t_1 — отношение $\frac{A_1 - A_0}{A_0}$ и **процентным приростом величины A** за время t_1 — величина $\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100 \%$.

Обозначая процентный прирост величины A через $p \%$, получаем формулу, выражающую A_1 через A_0 и p , $A_1 = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$.

Если же величина A и далее через равные промежутки времени будет иметь процентный прирост p , то в момент времени $t_n = nt_1$ ее значение A_n будет равно:

а) $A_n = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right)$ (формула **простых процентов**); (в этом случае предполагается, что по истечении каждого промежутка времени прирост изымается.)

б) $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$ (формула **сложных процентов**) (в этом случае доход за новый промежуток времени исчисляется с наращенной суммы).

Если величина A за время t_1 имеет процентный прирост $p_1\%$, на следующем этапе за время $t_2 - t_1$ (не обязательно равное t_1) — $p_2\%$, далее за время $t_3 - t_2$ — $p_3\%$ и т. д., то в момент времени t_n значение A_n будет равно

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{p_n}{100} \right).$$



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 4. Выработка продукции предприятия за первый год работы возросла на $p\%$, а за следующий год по сравнению с первоначальной возросла на 10% больше, чем за первый год. Определить, насколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%?



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Решение. Обозначим через V_0 исходный годовой объем выработки предприятия. Тогда объем годовой выработки через год V_1 выражается формулой $V_1 = V_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)$, а объем годовой выработки через два года V_2 формулой

$$V_2 = V_1 \left(1 + \frac{p + 10}{100} \right) = V_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right) \cdot \left(1 + \frac{p + 10}{100} \right).$$

Согласно условию, $V_2 = V_0 \left(1 + \frac{48,59}{100} \right)$. Приравнивая правые части двух последних формул, получаем квадратное уравнение $p^2 + 210p - 3859 = 0$, из которого находим $p = 17$. **Ответ:** 17 %.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Полезно разобрать следующую задачу.

Пример 5. *Цена товара увеличилась на 25 %. На сколько процентов ее необходимо уменьшить, чтобы получить первоначальное значение?*

Решение. Пусть N – первоначальная цена товара. Тогда после повышения она будет равна $N\left(1 + \frac{25}{100}\right) = \frac{5}{4}N$. После понижения этой цены на x %, она должна равняться исходной, т. е. $\frac{5}{4}N\left(1 - \frac{x}{100}\right) = N$. Отсюда $1 - \frac{x}{100} = \frac{4}{5}$ и $x = 20$.

Ответ: 20 %.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 6. На деньги, размещенные в трех банках, за год начисляется определенный процент, свой для каждого банка. Если пятую часть некоторой суммы положить в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк, то через год сумма вкладов превысит исходную сумму на 106%. Если же четверть суммы положить в первый банк, а остальные деньги – во второй банк, то через год сумма вкладов будет такой же, как и при размещении половины исходной суммы во втором банке, а остальных денег – в третьем банке. Наконец, при размещении всей суммы во втором банке через год вклад станет на 5% больше, чем сумма вкладов в первом, втором и третьем банках, если разместить в них деньги в равных долях. Найти процент, начисляемый на вклады во втором банке.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Решение. Пусть p_1 , p_2 и p_3 – проценты, начисляемые в первом, втором и третьем банках соответственно, а n – исходная сумма. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}n\frac{p_1}{100} + \frac{4}{5}n\frac{p_2}{100} = 1,06n, \\ \frac{1}{4}n\frac{p_1}{100} + \frac{3}{4}n\frac{p_2}{100} = \frac{1}{2}n\frac{p_2}{100} + \frac{1}{2}n\frac{p_3}{100}, \\ n\left(1 + \frac{p_2}{100}\right) = \frac{1,05}{3}\left(3n + n\frac{p_1}{100} + n\frac{p_2}{100} + n\frac{p_3}{100}\right). \end{cases}$$



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Сокращая в системе на n , и, обозначая $x = \frac{p_1}{100}$, $y = \frac{p_2}{100}$, $z = \frac{p_3}{100}$ получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}y = 1,06, \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, \\ y = 0,05 + \frac{1,05}{3}(x + y + z). \end{cases}$$

Решая систему относительно y , получим $y = 1,1$ или $p_2 = 110\%$.

Ответ: $p_2 = 110\%$.



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Пример 7. Вклад, находящийся в банке в течение года, возрастает на определенный процент, свой для каждого банка. В начале первого года $\frac{3}{5}$ некоторой суммы положили в первый банк, а оставшуюся часть – во второй банк. К концу первого года сумма вкладов составила 1140 единиц, а к концу второго года – 1302 единицы. Если бы в начале первого года в первый банк положили $\frac{2}{5}$, а оставшуюся часть исходной суммы во второй банк, то в конце первого года сумма вкладов составила бы 1160 единиц. Какой стала бы сумма вкладов к концу второго года?



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Решение. Пусть p_1 и p_2 – проценты, начисляемые в конце года первым и вторым банками соответственно, а n – размещаемая в них сумма. Обозначим через x и y коэффициенты, на которые умножаются по истечении года вклады в первом и втором банках: $x = 1 + \frac{p_1}{100}$, $y = 1 + \frac{p_2}{100}$. Из условий задачи получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}nx + \frac{2}{5}ny = 1140, \\ \frac{3}{5}nx^2 + \frac{2}{5}ny^2 = 1302, \\ \frac{2}{5}nx + \frac{3}{5}ny = 1160. \end{cases}$$



Задачи на концентрации и процентные соотношения; процентный прирост и “сложные проценты”

Разделив первое уравнение системы на третье, получим:

$$\frac{3x + 2y}{2x + 3y} = \frac{57}{58} \text{ или } y = \frac{12}{11}x.$$

Исключая y из второго уравнения системы, получим

$\frac{3}{5}nx^2 + \frac{2}{5}\left(\frac{144}{121}\right)nx^2 = 1302$ или $nx^2 = 1310$. Тогда искомая величина равна

$$\frac{2}{5}nx^2 + \frac{3}{5}ny^2 = \frac{2}{5}nx^2 + \frac{3}{5}\left(\frac{144}{121}\right)nx^2 = \frac{674}{605}nx^2 = \frac{674}{605} \cdot 1310 = 1348.$$

Ответ. 1348.



Задачи на вклады

(схема 1 – платеж равными взносами)

Арифметическая и геометрическая прогрессии,
использование при подготовке к заданиям №17 ЕГЭ.

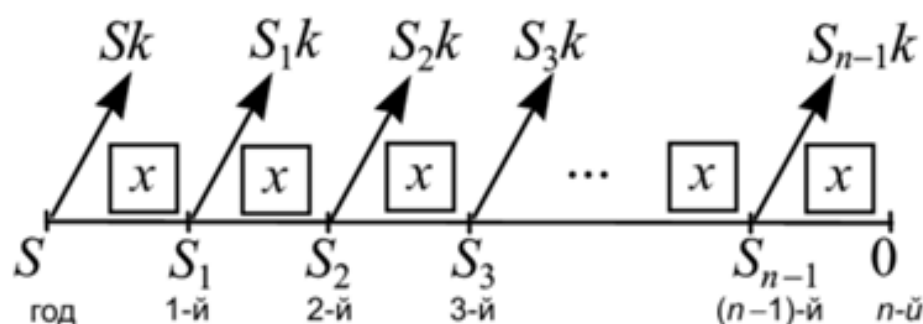
Схема 1. Пусть в банке планируется взять кредит на некоторую сумму S . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на r % по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найти общую сумму платежей, внесенных клиентом, после погашения кредита, если все ежегодные платежи равны между собой.

Решение.

Пусть x – вносимый ежегодный платеж, S_m – долг клиента банку на конец m -го года. Тогда $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ – его долг банку в начале $(m+1)$ -го года или $S_m \cdot k$, где $k = 1 + \frac{r}{100}$.



В соответствии с нарисованной схемой получаем цепочку равенств:

$$S_1 = S \cdot k - x,$$

$$S_2 = S_1 \cdot k - x = (S \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

$$S_3 = S_2 \cdot k - x = (S \cdot k^2 - x \cdot k - x) \cdot k - x = S \cdot k^3 - x \cdot k^2 - x \cdot k - x,$$

.....

$$S_n = S_{n-1} \cdot k - x = S \cdot k^n - x \cdot k^{n-1} - x \cdot k^{n-2} - \dots - x \cdot k - x =$$

$$= S \cdot k^n - x \left(\underbrace{k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + k + 1}_{\text{сумма геометрической прогрессии}} \right) = 0.$$

сумма геометрической прогрессии

Получаем уравнение $S \cdot k^n - x \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = 0$. Отсюда $x = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}$

и общая сумма выплат равна $nx = S \cdot \frac{k^n(k - 1)}{k^n - 1}$.





Задачи на вклады (схема 2 – уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

Схема 2. Пусть в банке планируется взять кредит на некоторую сумму S . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- после внесения платежа каждый год **долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года.**

Найти общую сумму внесенных платежей после погашения кредита.

Решение.

Пусть x_m и S_m – соответственно вносимый платеж и долг клиента банку на конец m -го года. Тогда $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ – его долг банку в начале $(m+1)$ -го года или $S_m \cdot k$, где $k = 1 + \frac{r}{100}$. В соответствии с условием задачи долг ежегодно уменьшается на величину равную $\frac{S}{n}$, тогда $S_m = S - S \cdot \frac{m}{n}$.



Задачи на вклады (схема 2 – уменьшение долга каждый год на одну и ту же величину)

Схема 2. Пусть в банке планируется взять кредит на некоторую сумму S . Условия его возврата таковы:

- в начале года долг увеличивается на r % по сравнению с концом прошлого года;
- до конца каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- после внесения платежа каждый год **долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на конец предыдущего года.**

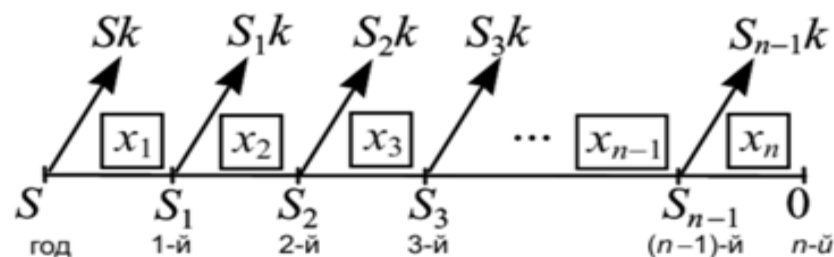
Найти общую сумму внесенных платежей после погашения кредита.

Решение.

Пусть x_m и S_m – соответственно вносимый платеж и долг клиента банку на конец m -го года. Тогда $S_m \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)$ – его долг банку в начале $(m+1)$ -го года или $S_m \cdot k$, где $k = 1 + \frac{r}{100}$. В соответствии с условием задачи долг ежегодно уменьшается на величину равную $\frac{S}{n}$, тогда $S_m = S - S \cdot \frac{m}{n}$.



В соответствии с условием задачи и схемой получаем цепочку равенств:



$S_1 = S - \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-1}{n},$	$x_1 = S \cdot k - S_1 = S \cdot k - S \cdot \frac{n-1}{n},$
$S_2 = S - 2 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-2}{n},$	$x_2 = S_1 \cdot k - S_2 = S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-2}{n},$
$S_3 = S - 3 \cdot \frac{S}{n} = S \cdot \frac{n-3}{n},$	$x_3 = S_2 \cdot k - S_3 = S \cdot \frac{n-2}{n} \cdot k - S \cdot \frac{n-3}{n},$
.....	
$S_m = S - (n-1) \cdot \frac{S}{n} = \frac{S}{n},$	$x_n = S_{n-1} \cdot k = \frac{S}{n} \cdot k.$

$$\begin{aligned}
 &\text{Суммируя все выплаты, получаем } x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = \\
 &= S \cdot k - \underbrace{S \cdot \frac{n-1}{n} + S \cdot \frac{n-1}{n} \cdot k}_{\frac{n-1}{n}} - \underbrace{S \cdot \frac{n-2}{n} + S \cdot \frac{n-2}{n} \cdot k}_{\frac{n-2}{n}} - S \cdot \frac{n-3}{n} + \dots + \frac{S}{n} \cdot k = \\
 &= S \cdot k + S \cdot (k-1) \underbrace{\left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)}_{\text{сумма арифметической прогрессии}}.
 \end{aligned}$$

Получаем формулу $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S \cdot k + S \cdot (k-1) \cdot \frac{n-1}{2}.$





4. Задачи с целочисленными неизвестными



Задачи с целочисленными переменными

В задачах на целые числа часто используется следующее.

1. (*Основная теорема арифметики*). Любое натуральное число единственным образом (с точностью до порядка следования множителей) раскладывается в произведение простых чисел.

2. (*Форма записи числа цифрами*). Пусть $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – цифры от 0 до 9, составляющие число. Тогда запись числа цифрами обозначается следующим образом – $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ (использован принцип позиционного значения цифр). Это означает, что

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0. \quad (4.1)$$

3. Если число q является делителем чисел n и m , то оно является делителем их суммы, разности и произведения.

4. Если произведение mn делится на q , а m взаимно просто с q , т. е. не имеет с ним общих простых делителей, то n делится на q ($m, n, q \in \mathbf{Z}$).



Задачи с целочисленными переменными

Пример 1. Найдите двузначное число, если оно в 2 раза больше произведения его цифр. Если переставить цифры этого числа в обратном порядке, то отношение полученного числа и данного будет равно $7/4$.

Решение. Пусть x – количество десятков, а y – количество единиц данного числа $\overline{xy}$. Первое условие запишется следующим образом

$$10x + y = 2xy. \quad (1)$$

Тогда второе условие запишется следующим образом

$$\frac{10y + x}{10x + y} = \frac{7}{4}.$$

Из уравнения (2) получаем $40y + 4x = 70x + 7y$ или $33y = 66x$, т.е. $y = 2x$.

Подставляя полученное выражение в уравнение (1) получаем $12x = 4x^2$. Так как данное число – двузначное, то $x \neq 0$. Следовательно, $x = 3$. Тогда $y = 6$ и 36 – искомое число. **Ответ:** 36.



Задачи с целочисленными переменными

Пример 2. Даны два двузначных числа. Если большее число написать впереди меньшего и полученное четырехзначное число разделить на меньшее, то в частном получится 247, а в остатке 10. Если же меньшее число написать впереди большего и разделить полученное число на большее, то в частном получится 41, а в остатке 20. Найти сумму данных двузначных чисел.



Задачи с целочисленными переменными

Решение. Пусть меньшее число – $\overline{xy}$, большее – $\overline{zt}$. Написав большее впереди меньшего получим $\overline{ztxy} = 1000z + 100t + 10x + y$. Запишем тот факт, что при делении полученного числа на меньшее в частном получится 247, а в остатке 10:

$$1000z + 100t + 10x + y = 247(10x + y) + 10.$$

Аналогично во втором случае:

$$1000x + 100y + 10z + t = 41(10z + t) + 20$$

Обозначив $s = \overline{zt} = 10z + t$, $u = \overline{xy} = 10x + y$, получим систему

$$\begin{cases} 100s + u = 247u + 10, \\ 100u + s = 41s + 20 \end{cases} \Rightarrow s = 37, u = 15.$$

Ответ: 37 и 15.



Задачи с целочисленными переменными

Пример 3. *Шестизначное число A делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее число A , удовлетворяющее этим требованиям.*

Решение. Пусть a – последняя цифра числа A , а B – число, полученное из A вычеркиванием последней цифры. Тогда $A = 10B + a$. Число B – пятизначное. Так как $99\,999 = 13 \cdot 7692 + 3$, то число $99\,996$ делится на 13. Числа A вида $\overline{999\,96a}$ не делятся на 17, так как наибольшее из них $999\,969$ при делении на 17 дает в остатке 12, а наименьшее $999\,960$ – дает в остатке 3. Значит $B = 99\,996$ не подходит.

Тогда возьмем $B = 99\,996 - 13 = 99\,983$. Если взять число A вида $\overline{999\,83a}$, то $999\,839 = 17 \cdot 58\,814 + 1$. Следовательно, подходит $999\,838$. Ясно, что оно наибольшее.

Ответ. 999 838.



Задачи с целочисленными переменными

Иногда при решении задач на целые числа число получающихся уравнений не достаточно для выбора однозначного ответа и, поэтому на одном из этапов решения приходится использовать перебор получающихся вариантов, чтобы отобрать решение, удовлетворяющее всем условиям задачи.



Задачи с целочисленными переменными

Пример 6. В финальном забеге соревнований по кроссу оказалось, что число спортсменов, выполнивших мастерский норматив меньше $6/13$, но больше $7/16$ от общего количества, закончивших дистанцию. Какое минимальное число спортсменов закончило дистанцию?

Решение. Пусть N – число спортсменов, закончивших дистанцию, а n – число спортсменов, выполнивших мастерский норматив. Тогда, согласно условия, N и n удовлетворяют неравенству

$$\frac{7}{16} < \frac{n}{N} < \frac{6}{13} \text{ или } \frac{16}{7} > \frac{N}{n} > \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{16}{7}n > N > \frac{13}{6}n.$$

Подберем такое наименьшее значение n , чтобы в интервале $\left(\frac{16}{7}n; \frac{13}{6}n\right)$ содержалось хотя бы одно целое число N . Перебором, начиная с $n=1$, получим, что при $n=4$ такое N , удовлетворяющее неравенству $9\frac{1}{7} > N > 8\frac{2}{3}$ существует и $N=9$.

Ответ: 9 спортсменов.



Задачи с целочисленными переменными

Пример 7. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пяти и девятиэтажных домов?

Решение. Пусть построено x – девятиэтажных и y – пятиэтажных домов. Из условия задачи получим систему неравенств

$$\begin{cases} x < y, \\ 2x + y > 24, \\ x + 2y < 27. \end{cases}$$

Из второго неравенства получаем $x > \frac{24 - y}{2}$, из третьего $x < 27 - 2y$, т. е.



Задачи с целочисленными переменными

$$\begin{cases} \frac{24-y}{2} < x < y, \\ \frac{24-y}{2} < x < 27-2y \end{cases} \quad (*) \text{ или, освобождаясь от } x, \begin{cases} \frac{24-y}{2} < y, \\ \frac{24-y}{2} < 27-2y. \end{cases}$$

Отсюда получаем $\begin{cases} 8 < y, \\ y < 10. \end{cases}$ Поскольку $y \in \mathbf{Z}$, то $y = 9$.

Из первого неравенства системы (*) получаем $7,5 < x < 9$ и $x \in \mathbf{Z}$, т. е. $x = 8$. **Ответ:** 9 пятиэтажных и 8 девятиэтажных.



5. Формула включений и исключений



Формула включений и исключений

Пусть A – конечное множество. Обозначим через $|A|$ число его элементов, т. е. если множество содержит n элементов, то $|A| = n$.

Если множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов. Обозначим $A_{12} = A_1 \cap A_2$. Легко убедиться, что

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_{12}|. \quad (5.1)$$

Это одна из важнейших формул комбинаторики, которую называют *формулой сложения*. С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа множеств.

Например, для трех множеств (обозначая $A_{ij} = A_i \cap A_j$, где $i = 1, 2; j = 2, 3; i \neq j$, $A_{123} = A_1 \cap A_2 \cap A_3$):

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| = \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{23}| - |A_{12} \cup A_{13}|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $A_{12} \cap A_{13} = A_{123}$, окончательно получаем

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_{12}| - |A_{13}| - |A_{23}| + |A_{123}|. \quad (5.2)$$



Формула включений и исключений

Пример 1. На уроке литературы учитель решил узнать, кто из 40 учеников читал книги A , B и C . Результаты опроса оказались таковы: книгу A читали 25 учащихся, книгу B – 22, книгу C – также 22. Книги A или B читали 33 ученика, A или C – 32, B или C – 31. Все три книги прочли 10 учащихся. Сколько учеников прочли только по одной книге? Сколько учащихся не читали ни одной из этих книг?



Формула включений и исключений

Пример 2. *В соревнованиях по легкой атлетике 82 % от числа участников выполнили норматив II-го разряда по прыжкам в высоту, 65 % – по прыжкам в длину и 70 % – в тройном прыжке. Оказалось, что каждый участник выполнил норматив хотя бы по двум дисциплинам. Спортсмены, выполнившие норматив по всем дисциплинам, мечтают стать мастерами спорта. Какой процент участников собирается стать мастерами спорта, и какой – не выполнил норму II-го разряда в прыжках в длину?*

Решение. Пусть число участников равно n . Множество всех участников в соответствии с условиями задачи разбивается на четыре подмножества (см. табл.).

Выполнили норму в прыжках в высоту	Выполнили норму в прыжках в длину	Выполнили норму в тройном прыжке	
+	+	–	x
+	–	+	y
–	+	+	z
+	+	+	t



Формула включений и исключений

Пусть тогда x – количество участников, не выполнивших выполнили норматив II-го разряда по прыжкам в высоту, y – по прыжкам в длину, z – в тройном прыжке и t – выполнивших норматив по всем дисциплинам. Тогда в соответствии с условиями задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + t = 0,82n, \\ x + z + t = 0,65n, \\ y + z + t = 0,7n, \\ x + y + z + t = n. \end{cases}$$

Отсюда получаем $t = 0,17n$, а $y = 0,35n$. **Ответ.** 17% и 35%.

Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru

