



Правительство
Москвы



ДЕПАРТАМЕНТ
ОБРАЗОВАНИЯ
ГОРОДА МОСКВЫ



Департамент
информационных
технологий
города Москвы



ДЕПАРТАМЕНТ
ВНЕШНЕЭКОНОМИЧЕСКИХ
И МЕЖДУНАРОДНЫХ СВЯЗЕЙ
ГОРОДА МОСКВЫ



МОСКОВСКИЙ
МЕЖДУНАРОДНЫЙ
ФОРУМ

ГОРОД
ОБРАЗОВАНИЯ

Задание 14 из вариантов ЕГЭ. Угол между плоскостями.

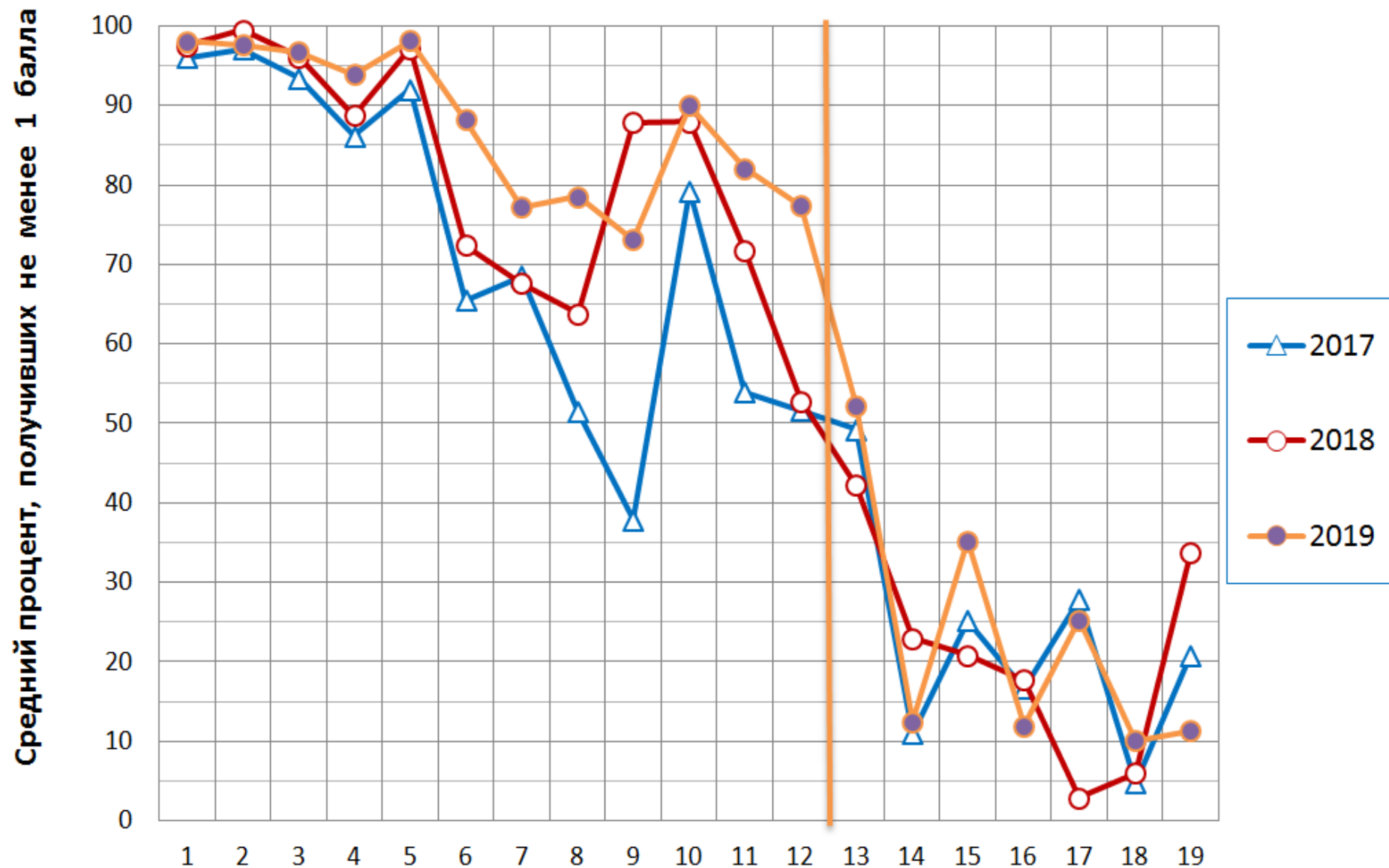
Спикер:

ПРОКОФЬЕВ АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ

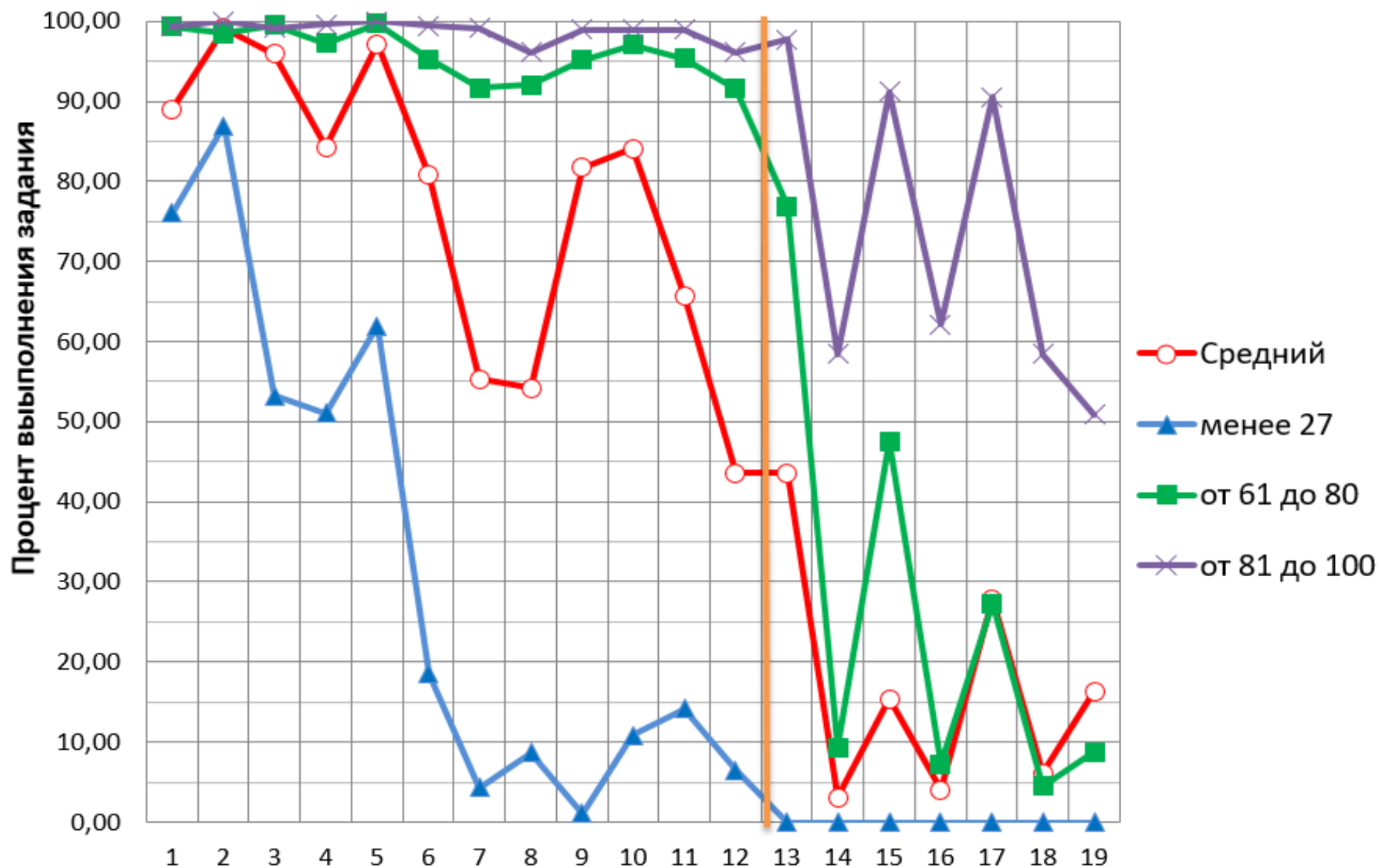
*(Заведующий кафедрой «Высшей математики» НИУ МИЭТ,
учитель математики школы № 1298 «Профиль Куркино» г. Москвы)*



Сравнение процентов решаемости заданий экзамена по математике профильного уровня в 2017-2019 гг.



Сравнение процентов выполнения заданий ЕГЭ 2020 по математике профильного уровня по группам



Учебники.

1. Геометрия, 10-11: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. – 16-е изд. – М.: Просвещение, ОАО «Московские учебники», 2007. – 256 с.
2. Геометрия. 10 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2005. – 224 с.
3. Геометрия. 11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений с углубл. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2005. – 368 с.

Статьи 2010-2011.

4. Бардушкин В.В., Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Методы решения задач по теме «Двугранный угол. Угол между плоскостями». «Математика для школьников», – М.: «Школьная пресса», – 2011. – №1. – С. 10-16.
5. Бардушкин В.В. Белов А.А., Ланцева И.А., Прокофьев А.А., Фадеичева Т.П. Применение теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника при решении стереометрических задач. «Математика для школьников», – М.: «Школьная пресса», –2010. Часть 1 – №3 – С. 26-35; Часть 2 – №4. – С. 13-21.

А. Прокофьев

Перпендикулярность плоскостей в заданиях ЕГЭ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ. №1, 2021

А.А. Прокофьев,

e-mail: aaprokof@yandex.ru

НЕСКОЛЬКО СТЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА
МНОГОГРАННИКИ И ИХ СЕЧЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ

ИДУ НА ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ. №2, 2021

Прокофьев А.А.,

МИЭТ (Москва)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ НАХОЖДЕНИЯ
УГЛА МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ В ЗАДАЧАХ НА
СЕЧЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ ПЛОСКОСТЬЮ



1. ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УГЛА ДВУГРАННОГО УГЛА

В этом случае задача сводится непосредственно к построению и вычислению

величины линейного угла двугранного угла, образованного пересекающимися плоскостями α и β [1]. Соответствующий линейный угол строится с помощью двух перпендикуляров a и b (рис. 1), проведенных в указанных плоскостях к прямой их пересечения $l = \alpha \cap \beta$, а его величина в дальнейшем находится либо из некоторого прямоугольного треугольника, либо из некоторого треугольника с применением теоремы косинусов.

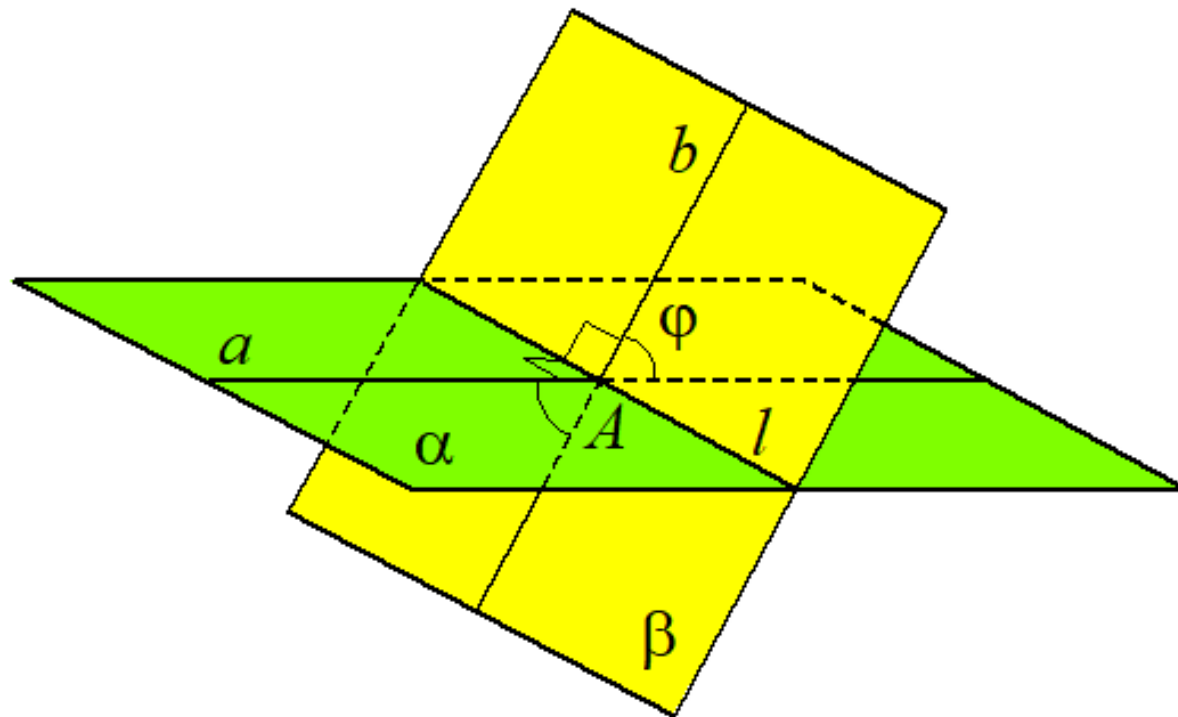


Рис. 1

Пример 1. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 6. Через точки A , C_1 и середину D ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ACC_1 .

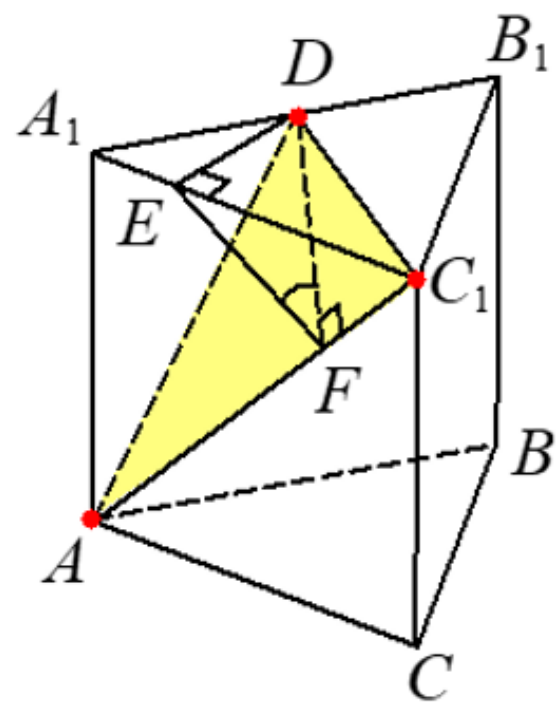


Рис. 1а

Решение. а) Соединяя пары указанных в условии задачи точек, лежащих в одной грани, получаем сечение – треугольник ADC (рис. 1а). Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ правильная, то треугольник $A_1B_1C_1$ – равносторонний, а его медиана C_1D является высотой, то есть $C_1D \perp A_1B_1$. У правильной призмы боковые рёбра перпендикулярны плоскости основания, значит, $C_1D \perp AA_1$. Из признака перпендикулярности прямой и плоскости следует, что $C_1D \perp AA_1B_1$, а значит, $C_1D \perp AD$. Следовательно, треугольник ADC_1 – прямоугольный.

б) Опустим перпендикуляр DE из точки D на ребро A_1C_1 . Поскольку также $DE \perp AA_1$, то $DE \perp ACC_1$ (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Проведем в треугольнике ADC_1 высоту DF (рис. 1а). Поскольку DF – наклонная к плоскости ACC_1 , $DE \perp AA_1C_1$ и $DF \perp AC_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $EF \perp AC_1$. Значит, $\angle EFD$ – линейный угол искомого двугранного угла, образованного секущей плоскостью ADC_1 и плоскостью ACC_1 .

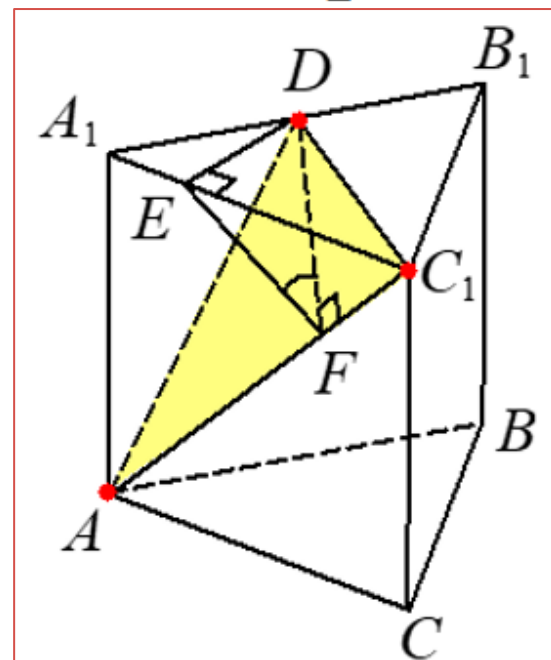
Поскольку $DE \perp ACC_1$, то треугольник EDF – прямоугольный. Находим $DE = A_1D \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (D – середина ребра A_1B_1), $A_1E = A_1D \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$, то есть

$A_1E : EC_1 = 1 : 3$. Боковая грань AA_1C_1C – квадрат, поэтому высота треугольника AA_1C_1 опущенная из вершины A_1 ,

равна половине A_1C . Отсюда $EF = \frac{3}{4} \cdot \frac{A_1C}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Тогда, получаем $\operatorname{tg} \angle EFD = \frac{ED}{EF} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\angle EFD = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}}$.



2. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ПЛОЩАДИ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ МНОГОУГОЛЬНИКА

Теорема. Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению его площади $S_{\text{мн}}$, умноженной на косинус угла φ между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции: $S_{\text{пр}} = S_{\text{мн}} \cdot \cos \varphi$.

Обычно рассматриваемый в этом пункте метод применяют при вычислении угла между плоскостью сечения и плоскостью какой-либо грани многогранника (часто в качестве такой грани выступает основание пирамиды или призмы). Так поступают в случаях, когда нахождение $S_{\text{пр}}$ и $S_{\text{сеч}}$ является более простой задачей, чем непосредственное вычисление двугранного угла φ , сопряжённое с построением на чертеже его линейного угла. Из приведенной выше теоремы следует:

$$\cos \varphi = \frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{сеч}}} . \quad (1)$$

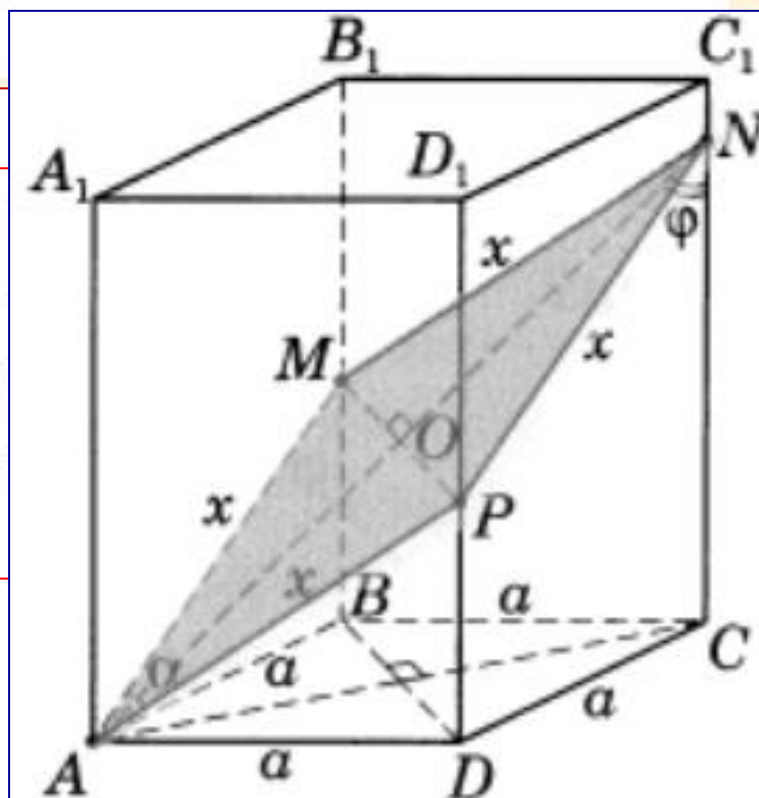
Теорема 32. Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна площади проектируемого многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекций.

$$S(\Phi_1) = S(\Phi) \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между плоскостью n -угольника Φ плоскостью проекций.

Пример 7. Плоскость пересекает прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием по ромбу с острым углом α . Под каким углом эта плоскость пересекает боковые ребра параллелепипеда?

Ответ: $\arcsin\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$.



Применим данный способ для решения пункта б) примера 1.

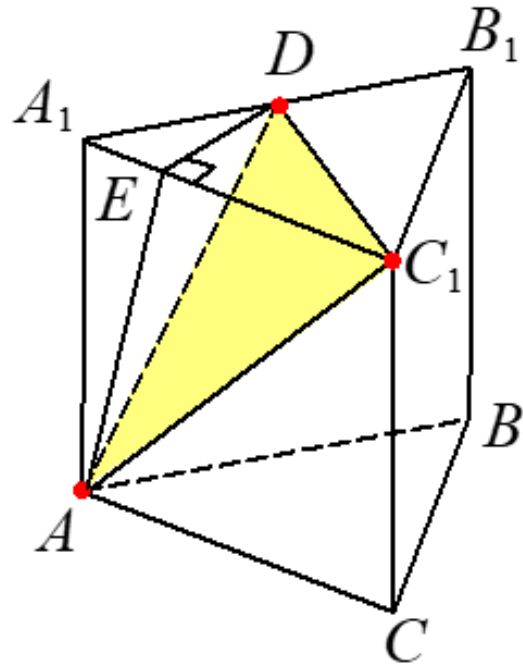


Рис. 16

Решение. б) (2-й способ). Выше было доказано, что $DE \perp AA_1C_1$. Тогда, треугольник AEC_1 – ортогональная проекция прямоугольного треугольника ADC_1 на плоскость AA_1C_1 (рис. 16). Для нахождения искомого угла воспользуемся теоремой о площади ортогональной проекции многоугольника. Поскольку $DC_1 = 3\sqrt{3}$, а $AD = 3\sqrt{5}$, то площадь треугольника ADC_1 есть $S_{ADC_1} = \frac{1}{2} \cdot DC_1 \cdot AD = \frac{9\sqrt{15}}{2}$, а площадь треугольника AEC_1 есть

$$S_{AEC_1} = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot (A_1C_1 - A_1E) = \frac{27}{2},$$

где $A_1E = A_1D \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$. Тогда, по формуле (1) следует:

$$\cos \angle(ACC_1, ADC_1) = \frac{S_{AEC_1}}{S_{ADC_1}} = \sqrt{\frac{3}{5}}. \text{ Отсюда, } \angle(ACC_1, ADC_1) = \arccos \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Пример 4. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ через точки A_1, B и C , проведена секущая плоскость.

а) Докажите, что многоугольник, являющийся сечением данной призмы плоскостью $A_1 BC$, – равнобедренная трапеция.

б) Найдите угол между плоскостями $A_1 BC$ и $AA_1 E_1$, если $AA_1 = 2$, а $AB = 1$.

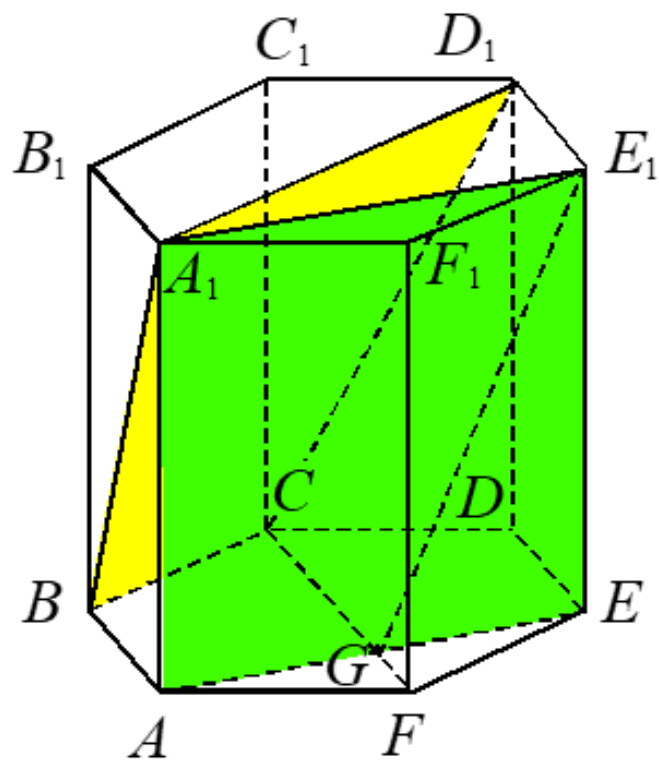


Рис. 1в

В соответствии с формулой (1) находим:

$$\cos \angle(AA_1 D_1, AA_1 E_1) = \frac{S_{AA_1 E_1 G}}{S_{BA_1 D_1 G}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} : \frac{3\sqrt{19}}{4} = \sqrt{\frac{12}{19}}.$$

Ответ: б) $\arccos \sqrt{\frac{12}{19}}$.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СТОРОНАМ ЛИНЕЙНОГО УГЛА

В некоторых задачах построение линейного угла затруднительно. И тогда вместо линейного угла можно рассмотреть угол со сторонами, соответственно параллельными по отношению к линейному углу.

Пример 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным a , через точки M на ребре BB_1 и N на DD_1 такие, что $BM = \frac{3a}{4}$ и $DN = \frac{a}{4}$, параллельно AC проведена секущая плоскость.

- Докажите, что сечение куба указанной плоскостью – параллелограмм.
- Найдите угол между секущей плоскостью и плоскостью ABC .

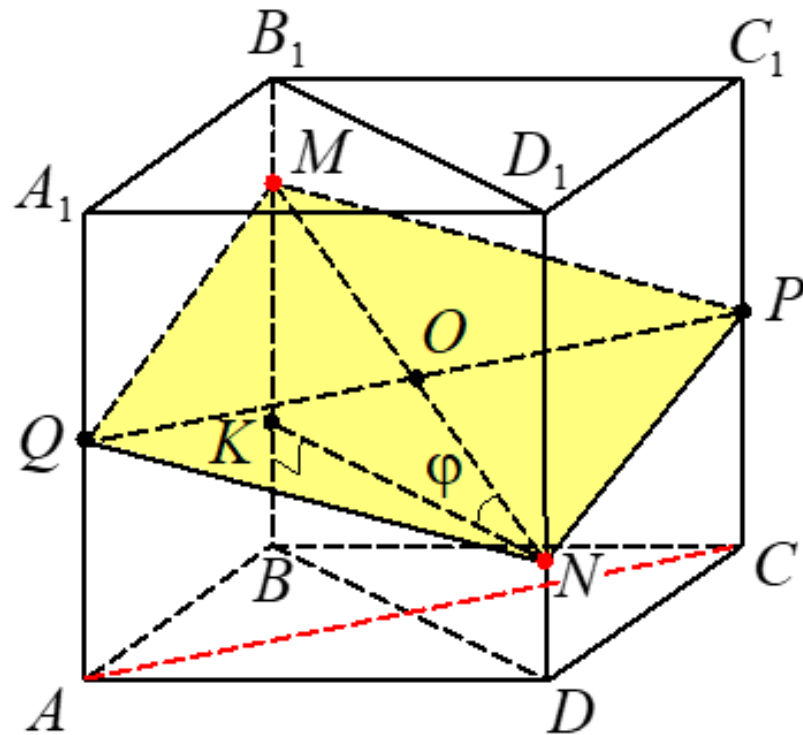


Рис. 3

Решение. а) Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точки M и N параллельно AC (рис. 3). С этой целью рассмотрим диагональную плоскость AA_1C_1 . Соединим точки M и N , тогда $AA_1C_1 \cap MN = O$, где точка O – середина отрезка MN . Поскольку, согласно условию, секущая плоскость параллельна AC , то прямая l ее пересечения с плоскостью AA_1C_1 также будет параллельна AC . Поэтому проведем через точку O прямую QP ($QP \parallel AC$). Соединив последовательно отрезками точки Q , M , P и N , получим сечение $QMPN$. Так как секущая

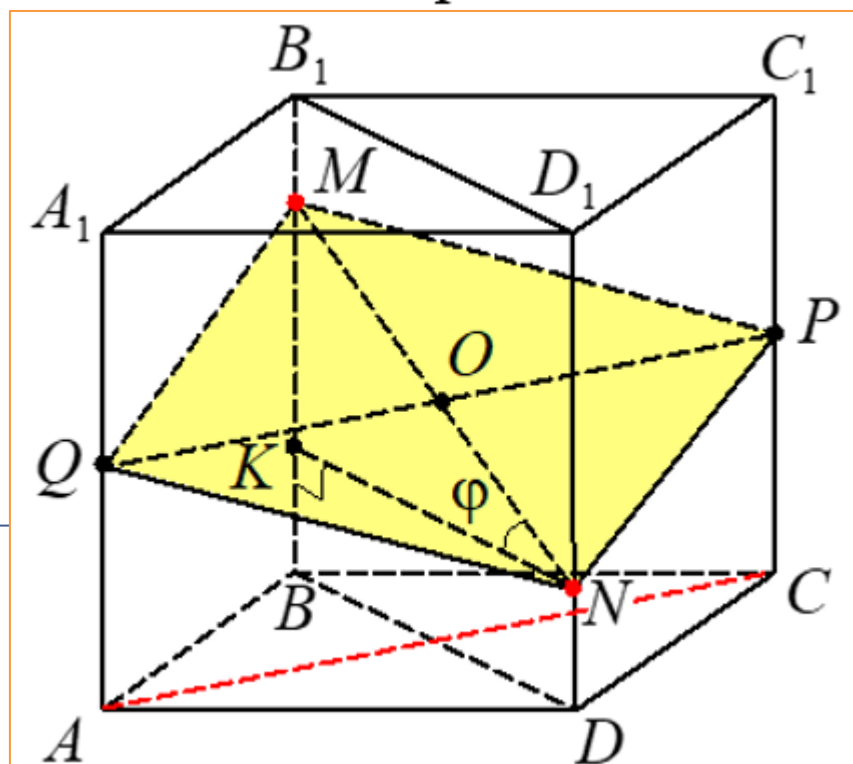
плоскость пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, то четырехугольник $QMPN$ является параллелограммом.

б) В квадрате $ABCD$ диагонали перпендикулярны ($BD \perp AC$), значит, $BD \perp l$. Проведем в плоскости BDD_1 прямую KN , параллельную BD . Тогда, $KN \perp l$. Прямая BD является проекцией наклонной MN на плоскость ABC , поэтому по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp l$. Прямая MN лежит в плоскости параллелограмма $MPNQ$, а прямая KN параллельна плоскости ABC . Следовательно, угол KNM равен линейному углу искомого двугранного угла (как углы с соответственно параллельными сторонами). Пусть $\angle MNK = \varphi$, тогда,

$B_1 \qquad C_1$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{MB - KB}{BD} = \frac{MB - ND}{BD} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: б) $\arctg \frac{\sqrt{2}}{4}$.



4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РАССМАТРИВАЕМЫМ

В некоторых задачах является эффективным подход, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями α и β ищется угол между плоскостями, параллельными рассматриваемым (или между одной из данных плоскостей и плоскостью, параллельной другой из них).

Пример 7. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через точку C_1 проведена секущая плоскость α , параллельно прямым AD_1 и EF , где точки E и F – середины рёбер BB_1 и DD_1 соответственно.

- а) Докажите, что сечение куба плоскостью α – равносторонний треугольник.
- б) Найдите угол между плоскостью грани $AA_1 B_1 B$ и плоскостью α .

Решение. а) Так как в пространстве через точку C_1 можно провести единственную прямую параллельную данной и $BC_1 \parallel AD_1$ (четырёхугольник ABC_1D_1 – параллелограмм), то $BC_1 \subset \alpha$, а отрезок BC_1 – след секущей плоскости на плоскости грани BB_1C_1C (рис. 4).

Четырёхугольник BB_1D_1D – прямоугольник (боковые ребра куба равны и перпендикулярны плоскости основания), а точки E и F – середины его противоположных сторон. Значит, $EF \parallel BD$. Поскольку точка B принадлежит секущей плоскости и по условию $EF \parallel \alpha$, то прямая BD лежит в плоскости α и отрезок BD – след секущей плоскости на плоскости основания.

Соединяя точки D и C_1 , получаем след секущей плоскости на плоскости грани DD_1C_1C . Соответственно треугольник BC_1D – сечение куба плоскостью α . Все его стороны являются диагоналями боковых граней кубу, поэтому $BC_1 = C_1D = BD$. Значит, треугольник BC_1D – равносторонний.

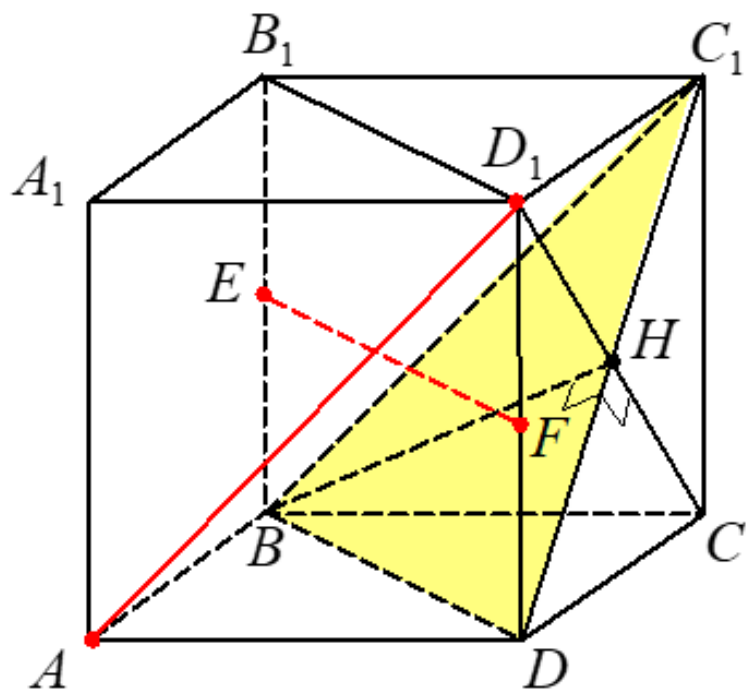


Рис. 4

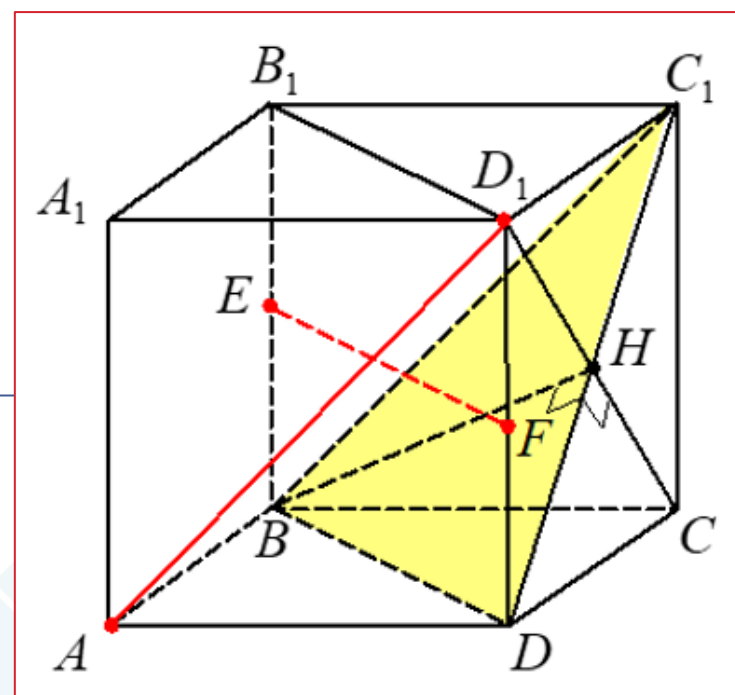
б) Так как плоскости AA_1B_1 и DD_1C_1 параллельны, то искомый угол равен углу между плоскостями BC_1D и DD_1C_1 (рис. 4). Диагонали грани куба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому $HC \perp DC_1$, где точка H – середина отрезка DC_1 . Так же $BH \perp DC_1$, как высота равностороннего треугольника BC_1D . Следовательно, угол BHC есть линейный угол двугранного угла BDC_1C .

Треугольник BHC – прямоугольный ($BC \perp DD_1C_1$) и $\angle BCH$ – прямой. Пусть ребро куба равно a , тогда $BC = a$, $HC = \frac{D_1C}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle BHC = \frac{BC}{HC} = \sqrt{2}.$$

Отсюда $\angle(\alpha, AA_1B_1) = \angle BHC = \operatorname{arctg} \sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$.



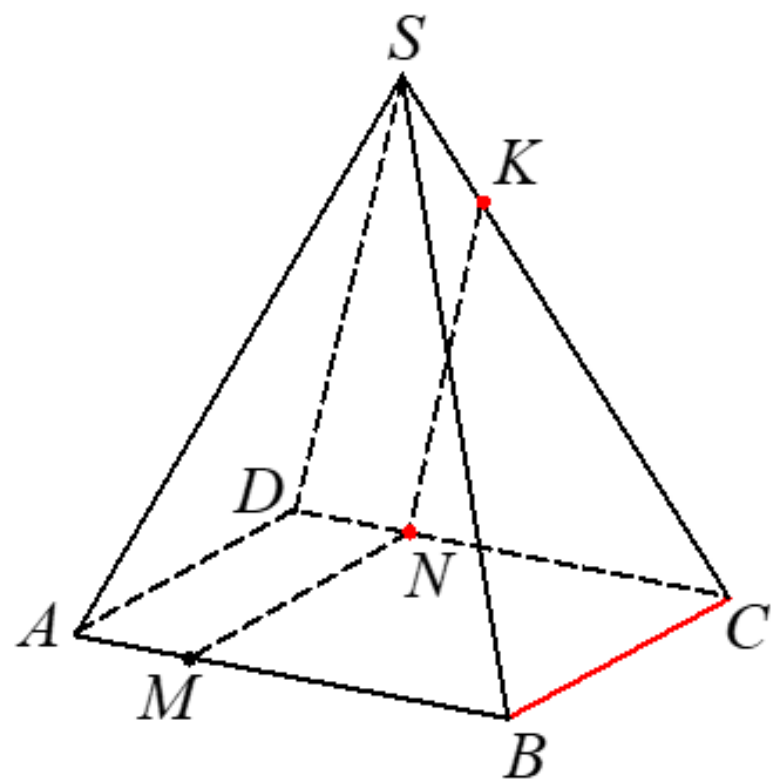


Рис. 4а

Пример 8 (ЕГЭ 2020). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 7. На ребрах CD и SC отмечены точки N и K соответственно, причём $DN:NC = SK:KC = 1:3$. Плоскость α содержит прямую KN и параллельна прямой BC .

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA .

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC .

Решение. а) По условию $DN:NC = SK:KC$.

Поскольку $\frac{DN}{NC} = \frac{DC - NC}{NC} = \frac{DC}{NC} - 1$, а

$\frac{SK}{KC} = \frac{SC - KC}{KC} = \frac{SC}{KC} - 1$, то получаем $\frac{DC}{NC} = \frac{SC}{KC}$.

Так как треугольники SDC и KNC содержат общий угол C и $DC:NC = SC:KC$, то они подобны и $SD \parallel KN$ (рис. 4а).

Точка N – общая точка плоскостей α и ABC . Значит, прямая пересечения этих плоскостей MN параллельна прямой BC , поскольку $BC \parallel \alpha$. Так как $MN \parallel BC$, а $BC \parallel AD$, то $MN \parallel AD$.

Следовательно, плоскости α и SAD параллельны по признаку параллельности плоскостей ($SD \parallel KN$ и $MN \parallel AD$). Значит, любая прямая плоскости SAD параллельна плоскости α . Соответственно $SA \parallel \alpha$.

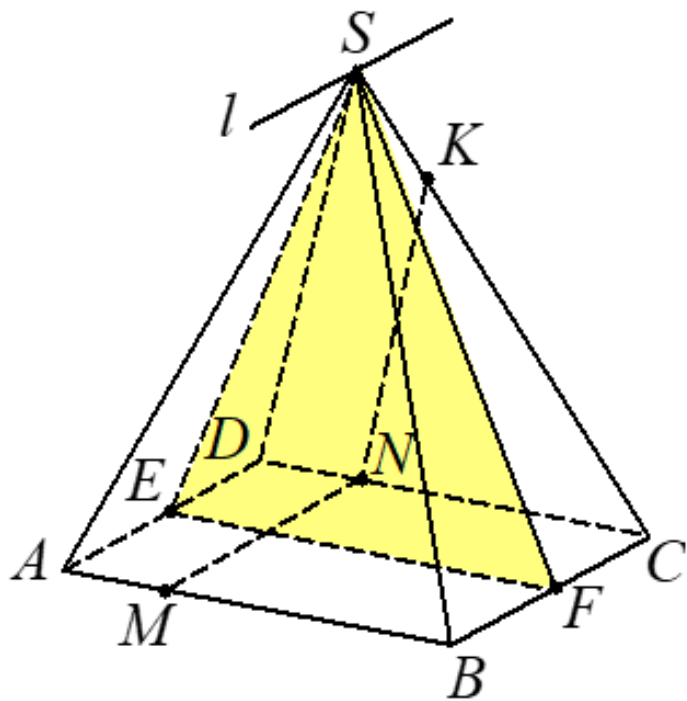


Рис. 46

б) Поскольку плоскости α и SAD параллельны, то $\angle(\alpha, SBC) = \angle(SAD, SBC)$.

Пусть прямая $l = SAD \cap SBC$ (рис. 46). Плоскости SAD и SBC содержат соответственно параллельные прямые AD и BC . Тогда $l \parallel AD$ и $l \parallel BC$.

Пусть точки E и F – середины сторон AD и BC . Тогда SE и SF – апофемы боковых граней пирамиды SAD и SBC соответственно, а значит, $SE \perp AD$ и $SE \perp l$, а $SF \perp BC$ и $SF \perp l$.

Значит, $\angle ESF$ – плоский угол двугранного угла, образованного плоскостями SAD и SBC . Найдем его из треугольника ESF . По условию $SA = 7$, $AD = 4$. Поскольку SE – апофема, то из прямоугольного треугольника SED получаем $SE = \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{45}$. Аналогично $SF = \sqrt{45}$. Так как $AEFB$ – прямоугольник, то $EF = AB = 4$.

Из теоремы косинусов для треугольника ESF получаем

$$\cos \angle ESF = \frac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE \cdot SF} = \frac{37}{45}.$$

Отсюда $\angle(\alpha, SBC) = \angle ESF = \arccos \frac{37}{45}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{37}{45}$.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕПЕНДИКУЛЯРОВ К ПЛОСКОСТЯМ

В некоторых задачах является эффективным подход, при котором вместо угла между пересекающимися плоскостями α и β ищется угол между прямыми, перпендикулярными рассматриваемым плоскостям.

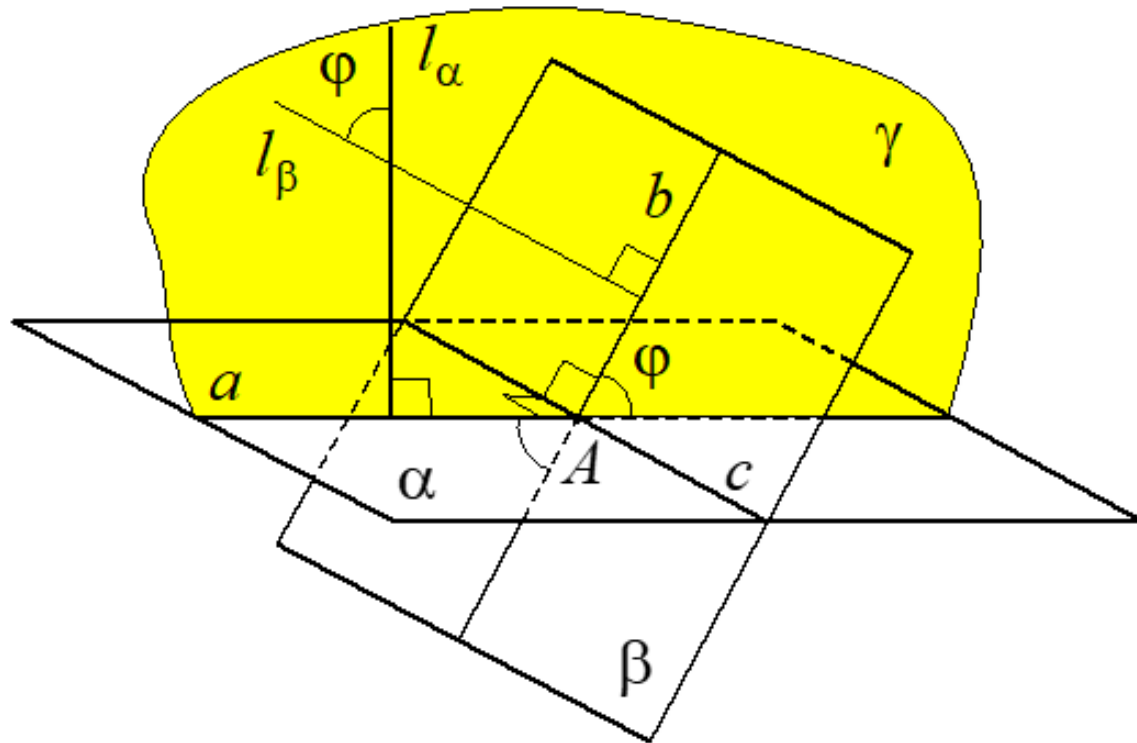


Рис. 5

На рис. 5 прямые l_α и l_β лежат в плоскости γ ($\gamma \perp \alpha$, $\gamma \perp \beta$) и перпендикулярны плоскостям α и β соответственно. Тогда угол между ними равен углу между плоскостями α и β . В общем случае прямые l_α и l_β могут быть скрещивающимися:

$$\angle(\alpha, \beta) = \angle(l_\alpha, l_\beta) = \varphi.$$

Пример 10. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ две секущие плоскости проходят через вершины B, A_1, D и A, B_1, C соответственно.

- а) Докажите, что прямая AC_1 перпендикулярна плоскости BA_1D .
б) Найдите угол между плоскостями BA_1D и AB_1C .

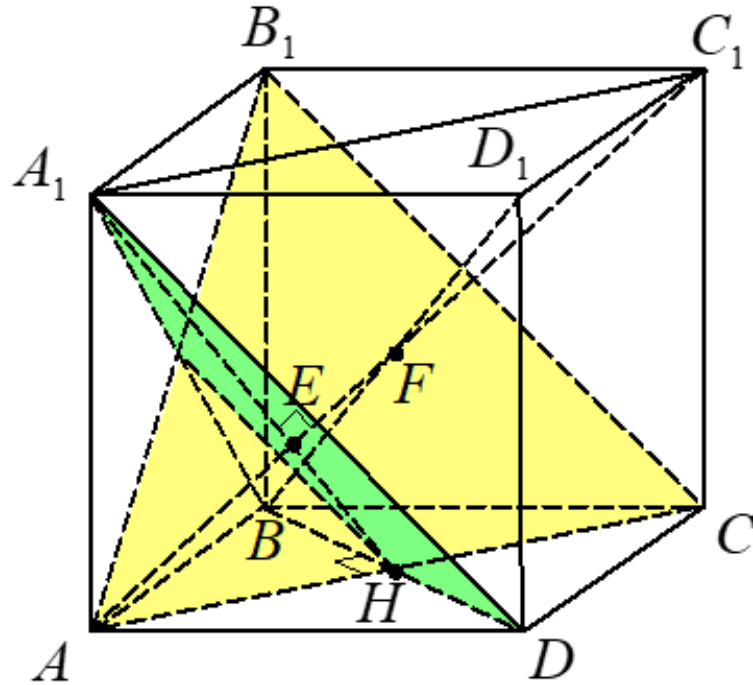


Рис. 5

Решение. а) Прямая BD перпендикулярна плоскости диагонального сечения куба AA_1C_1 ($BD \perp AC$ и $BD \perp AA_1$, рис. 5). Значит, $BD \perp AC_1$. В плоскости AA_1C_1 точка $E = A_1B \cap AC_1$, где точка $H = AC \cap BD$.

Ортогональной проекцией прямой AC_1 на плоскость грани AA_1B_1B является прямая AB_1 . Так как $AB_1 \perp A_1B$ и $AB_1 \subset AA_1B_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $A_1B \perp AC_1$.

Прямые BD и A_1B лежат в плоскости BA_1D и перпендикулярны AC_1 , значит $AC_1 \perp BA_1D$.

б) Аналогично доказывается, что $BD_1 \perp AB_1C$. Тогда,

$$\angle(BA_1D, AB_1C) = \angle(AC_1, BD_1).$$

Таким образом, задача свелась к нахождению острого угла между диагоналями AC_1 и BD_1 прямоугольника ABC_1D_1 .

Пусть F – точка пересечения диагоналей куба. Тогда $A_1C = BD_1 = \sqrt{3} \cdot a$,
 $AF = BF = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$. Из теоремы косинусов для треугольника ABF находим

$$\cos \angle AFB = \frac{AF^2 + BF^2 - AB^2}{2 \cdot AF \cdot BF} = \frac{\frac{3}{2}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{3},$$

то есть $\angle AFB = \arccos \frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

6. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ ДЛЯ ТРЕХГРАННОГО УГЛА

Теорема (косинусов для трехгранного угла [5]). *Во всяком трехгранном угле, плоские углы которого равны α , β и γ , а двугранные углы, противолежащие им, соответственно равны φ_A , φ_B и φ_C , имеют место следующие равенства (рис. 6):*

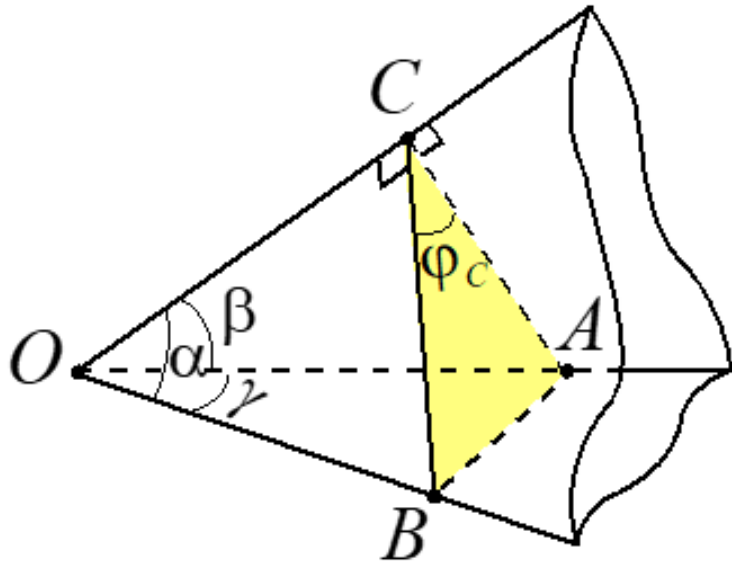


Рис. 6

$$\cos \varphi_C = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\cos \varphi_B = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma};$$

$$\cos \varphi_A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Данный метод удобен при нахождении величин двугранных углов, образованных гранями пирамиды, если известны плоские углы при её вершинах.

Пример 9. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ противоположные боковые грани попарно перпендикулярны. Через середины рёбер MA и BC проведена плоскость α , параллельная ребру MC .

- Докажите, что плоскость α параллельна ребру MD .
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью BMC .

Решим пункт б примера 9, используя приведенную теорему.

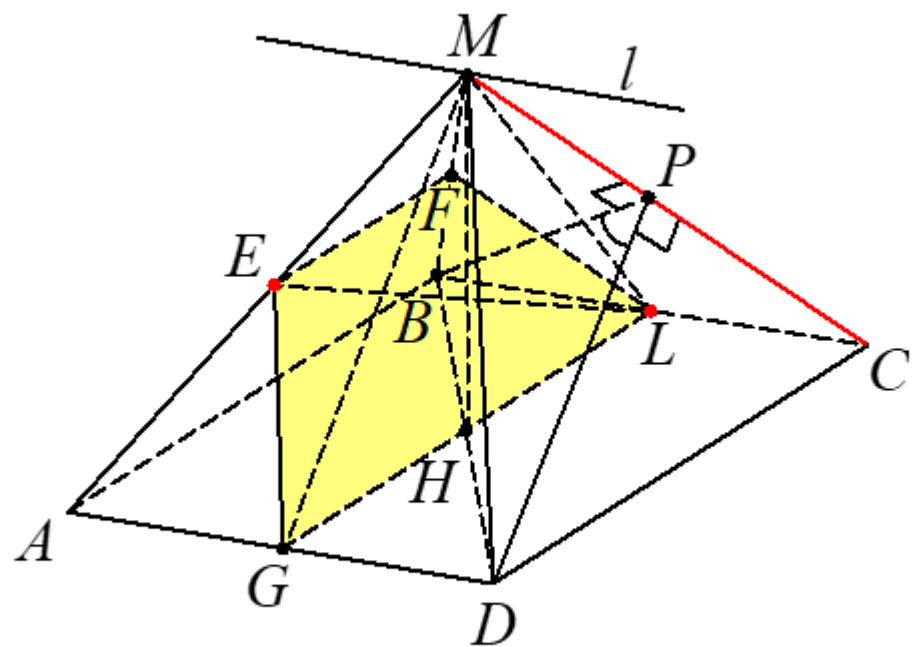


Рис. 6

Решение. б) Так как требуется найти величину φ двугранного угла $DMCB$, найдем значения синусов и косинусов плоских углов при вершине C (см. рис. 6). В основании пирамиды лежит квадрат, значит, $\angle BCD = 90^\circ$. Боковые грани пирамиды равны, поэтому $\angle MCB = \angle MCD$. Ранее было найдено $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $ML = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Тогда, $\sin \angle MCB = \frac{ML}{MC} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, а

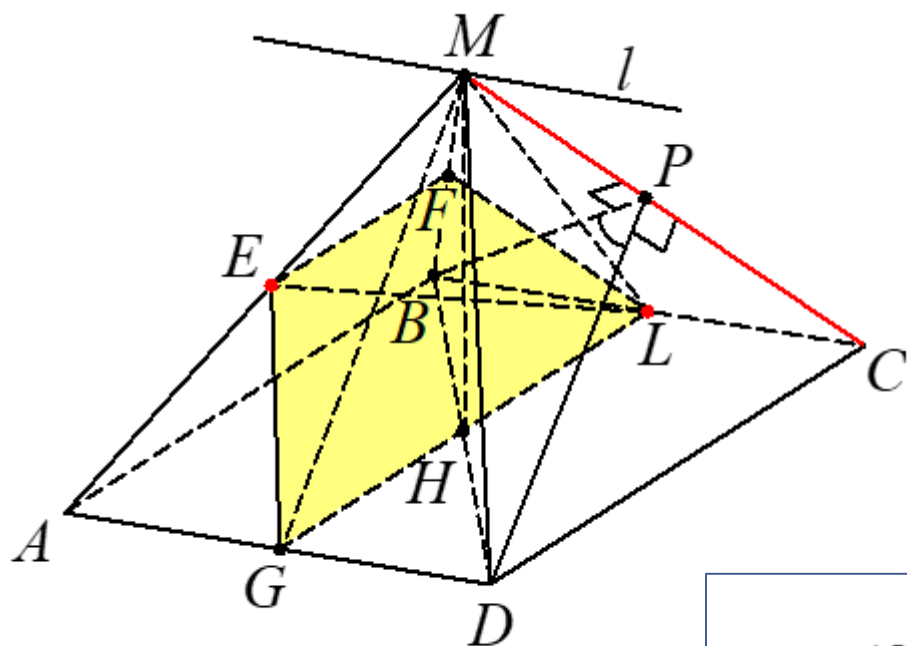


Рис. 6

$\cos \angle MCB = \cos \angle MCD = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Применяя теорему косинусов

для трехгранного угла при вершине C , получим

$$\cos \varphi = \frac{\cos \angle BCD - \cos \angle MCD \cdot \cos \angle MCB_1}{\sin \angle MCD \cdot \sin \angle MCB} = \frac{0 - \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}} = -\frac{1}{2}.$$

Значит, $\varphi = 120^\circ$. Тогда, искомый угол между плоскостью α и плоскостью BMC равен 60° .

7. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАССТОЯНИЙ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ И ДО ПРЯМОЙ

Решение задач этого пункта основано на применении таких понятий, как расстояние от точки до прямой и расстояние от точки до плоскости.

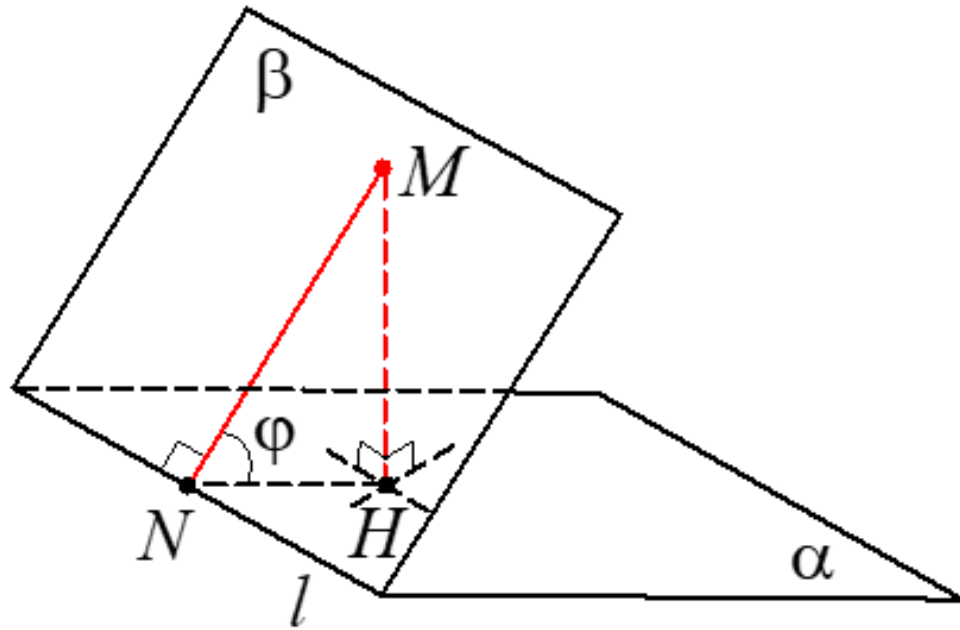


Рис. 7

до плоскости α , $\rho(M, l) = MN$ – расстояние от точки M до прямой l (рис. 7).

Пусть даны две плоскости α и β (рис. 7), пересекающиеся по прямой l . Если известны расстояния от точки M , лежащей в плоскости β , до плоскости α и до прямой $l = \alpha \cap \beta$, то синус угла между плоскостями α и β можно вычислить, используя формулу

$$\sin \angle(\alpha, \beta) = \frac{\rho(M, \alpha)}{\rho(M, l)}, \quad (2)$$

где $\rho(M, \alpha) = MH$ – расстояние от точки M

Пример 14. В основании прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной основания 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали $B_1 D$, причем $DE = 1$.

- Постройте сечение призмы плоскостью $A_1 E C_1$.
- Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC .

Решение. а) Прямая $B_1 D$ лежит в плоскости диагонального сечения – плоскости $AB_1 C_1$. Значит, и прямые AD и $C_1 E$ лежат в этой плоскости и пересекаются в точке

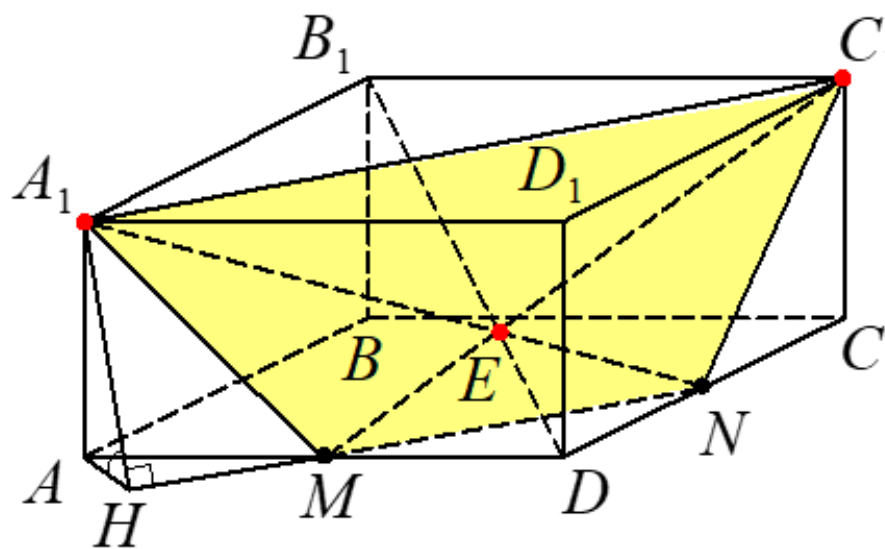


Рис. 7а

М (рис. 7а). Поскольку диагональ $B_1 D = \sqrt{B_1 B^2 + AB^2 + AD^2} = 3$, а $DE = 1$, то $\frac{ED}{B_1 E} = \frac{ED}{B_1 D - ED} = \frac{1}{2}$. Из подобия треугольни-

ков $B_1 E C_1$ и $M E D$ следует $\frac{MD}{B_1 C_1} = \frac{ED}{B_1 E} = \frac{1}{2}$, то есть $MD = AM = 1$ и значит, точка M – середина стороны AD .

Аналогично доказывается, что точка N – середина стороны DC .



Все точки прямых C_1E и A_1E принадлежат секущей плоскости, значит, точки A_1 , C_1 , M и N принадлежат плоскости A_1EC_1 . Соединяя отрезками пары точек, лежащих в одной грани, получаем четырехугольник MA_1C_1N , являющийся искомым сечением.

б) Так как точки M и N – общие точки секущей плоскости и плоскости ABC , то $MN = EA_1C_1 \cap ABC$. Расстояние от точки A_1 до плоскости ABC равно $AA_1 = 1$. Найдем расстояние от точки A_1 до прямой MN . Опустим перпендикуляр A_1H на прямую MN .

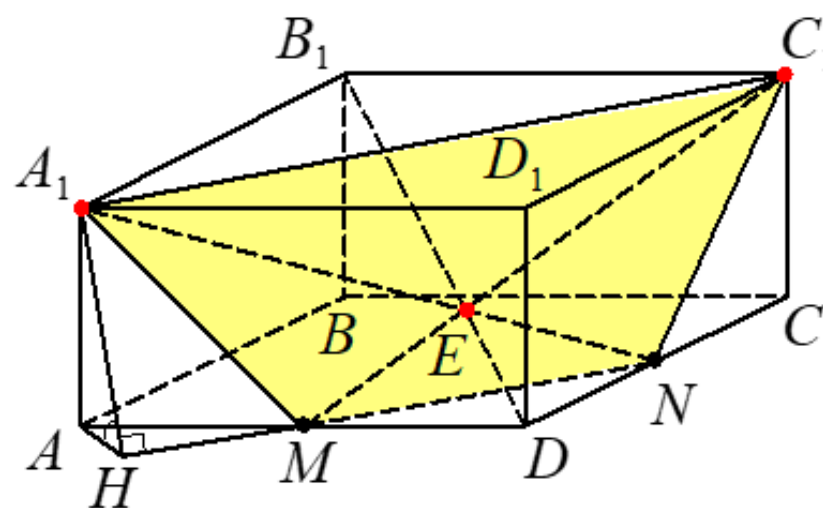


Рис. 7а

Четырехугольник MA_1C_1N – равнобедренная трапеция $A_1C_1 \parallel MN$, $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$, $MN = \sqrt{2}$ и $A_1M = C_1N = \sqrt{AA_1^2 + AM^2} = \sqrt{2}$. Соответственно A_1H равно высоте h этой трапеции,

$$\text{где } h = \sqrt{AM^2 - \left(\frac{A_1C_1 - MN}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

В соответствии с формулой (2)

$$\sin \angle(A_1EC_1, ABC) = \frac{\rho(A_1, ABC)}{\rho(A_1, MN)} = \frac{AA_1}{A_1H} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\text{то есть } \sin \angle(A_1EC_1, ABC) = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

8. МЕТОД КООРДИНАТ

Угол между двумя плоскостями α и β , заданными уравнениями соответственно $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, связан с углом между векторами их нормалей $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$. Именно,

$$\cos \angle (\alpha; \beta) = |\cos \angle (\vec{n}_1; \vec{n}_2)| = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, равенство $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$ выражает необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей α и β .

Демовариант. Решение задания 14

14

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

- а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.
б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1 .

а) Пусть точка H — середина AC . Тогда $BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63$.

Вместе с тем, $BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63$,

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M .

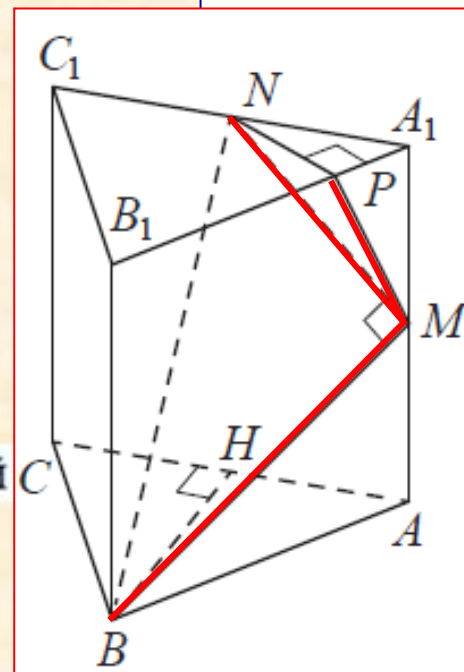
б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1 . Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1 .

Прямая BM перпендикулярна MN , тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

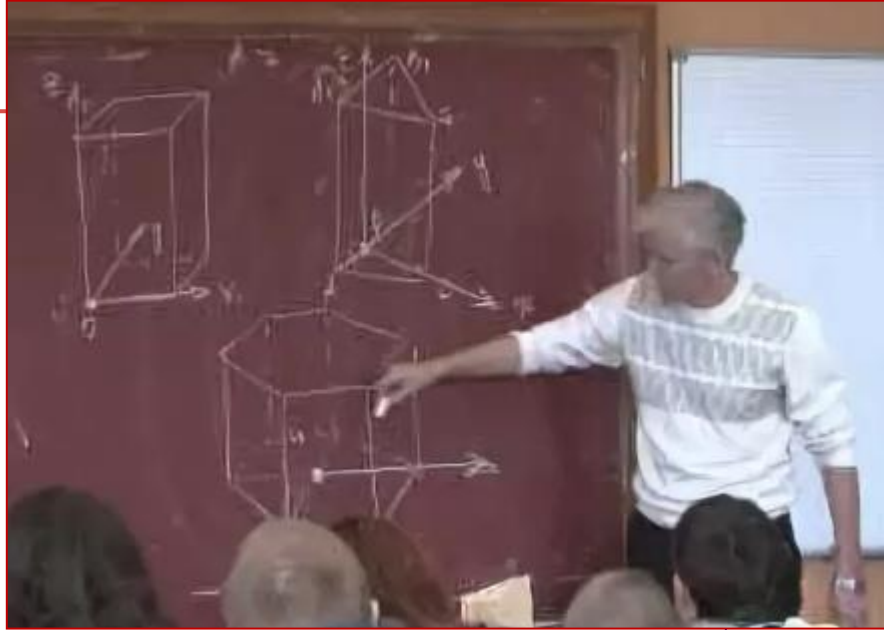
Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$,

$$\text{то есть } NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

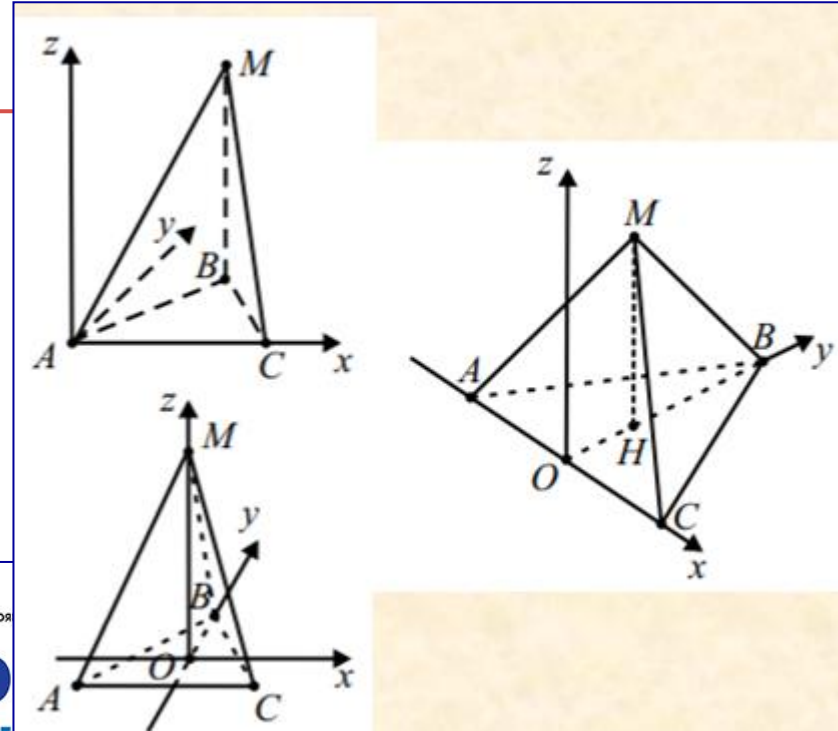
$$\text{Поэтому } \sin \angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}. \text{ Следовательно, } \angle NMP = \arcsin \sqrt{\frac{3}{8}}.$$



О введении системы координат в пространстве



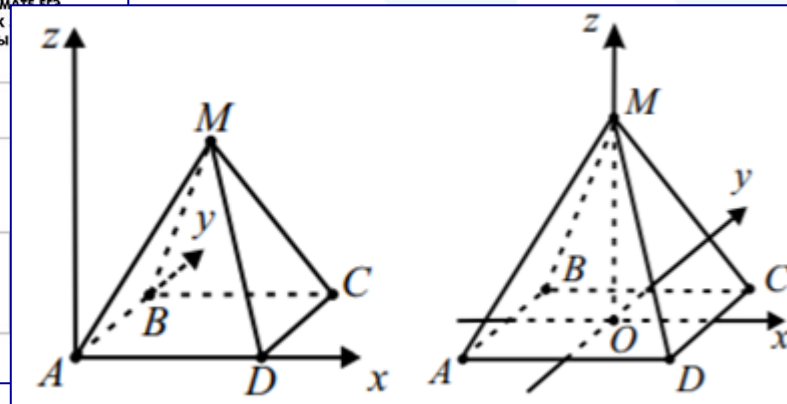
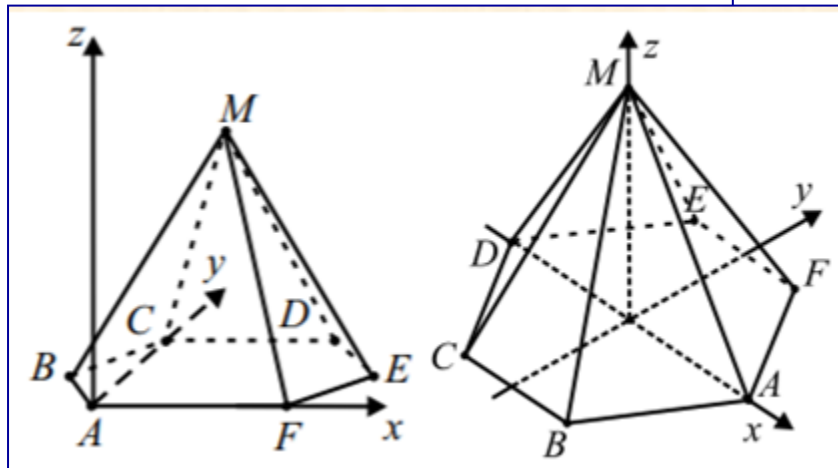
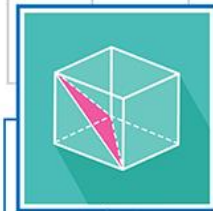
Трокофьев, А.Г. Коря



ЕГЭ МАТЕМАТИКА

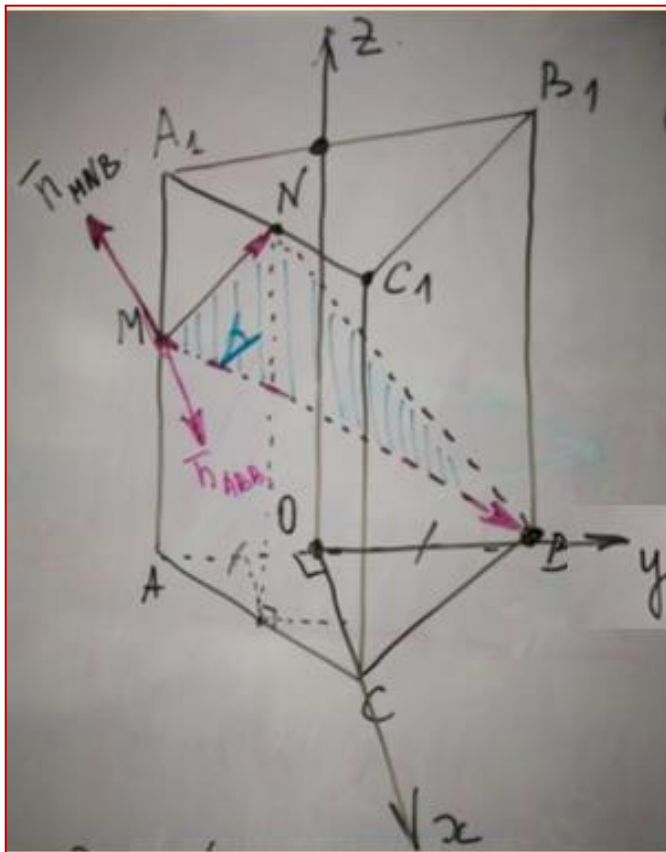
ЗАДАНИЕ 14 МНОГОГРАННИКИ

ЕДИНОВЕРСИАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ В ФОРМАТЕ ЕГЭ
РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ И ОТВЕТЫ



Координатный метод

(решение задания 14 из демонстрационного варианта)



$$\begin{aligned} \text{a). } M(0; -3; 3) \quad \vec{MB} &= \{0, 6, -3\} \\ N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 6\right) \quad \vec{MN} &= \left\{\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 3\right\} \\ B(0; 3; 0) \\ A(0; -3; 0). \quad \vec{MB} \cdot \vec{MN} &= 0 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \frac{3}{2} + (-3) \cdot 3 = 0 \\ &\Downarrow \\ \vec{MB} &\perp \vec{MN} \end{aligned}$$

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». // «Математика в школе», – М.: «Школьная пресса», – 2012, № 10, С. 9-15.

Бардушкин В.В., Прокофьев А.А. Обобщающее повторение темы «Решение заданий С2 координатно-векторным способом». // «Математика в школе», – М.: «Школьная пресса», – 2013, № 1, С. 8-18.

Угол между плоскостями:

ABV_1 : $x=0$ Вектор нормал. $\vec{n}_{ABV_1} = \{1; 0; 0\}$

MNB : найдем вектор нормал $\vec{n}_{MNB}$

$\vec{n}_{MNB} = \{a, b, c\}$ $\vec{n}_{MNB} \perp \vec{MB}$ и $\vec{n}_{MNB} \perp \vec{MN}$

$$\begin{cases} a \cdot 0 + 6 \cdot b + (-3)c = 0 \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a + \frac{3}{2}b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = c \\ 3\sqrt{3}a + 3b + 12b = 0 \end{cases} \quad a = \frac{-15b}{3\sqrt{3}} = -\frac{5}{\sqrt{3}}b \quad b=1$$

$\vec{n}_{MNB} = \left\{-\frac{5}{\sqrt{3}}; 1; 2\right\}$

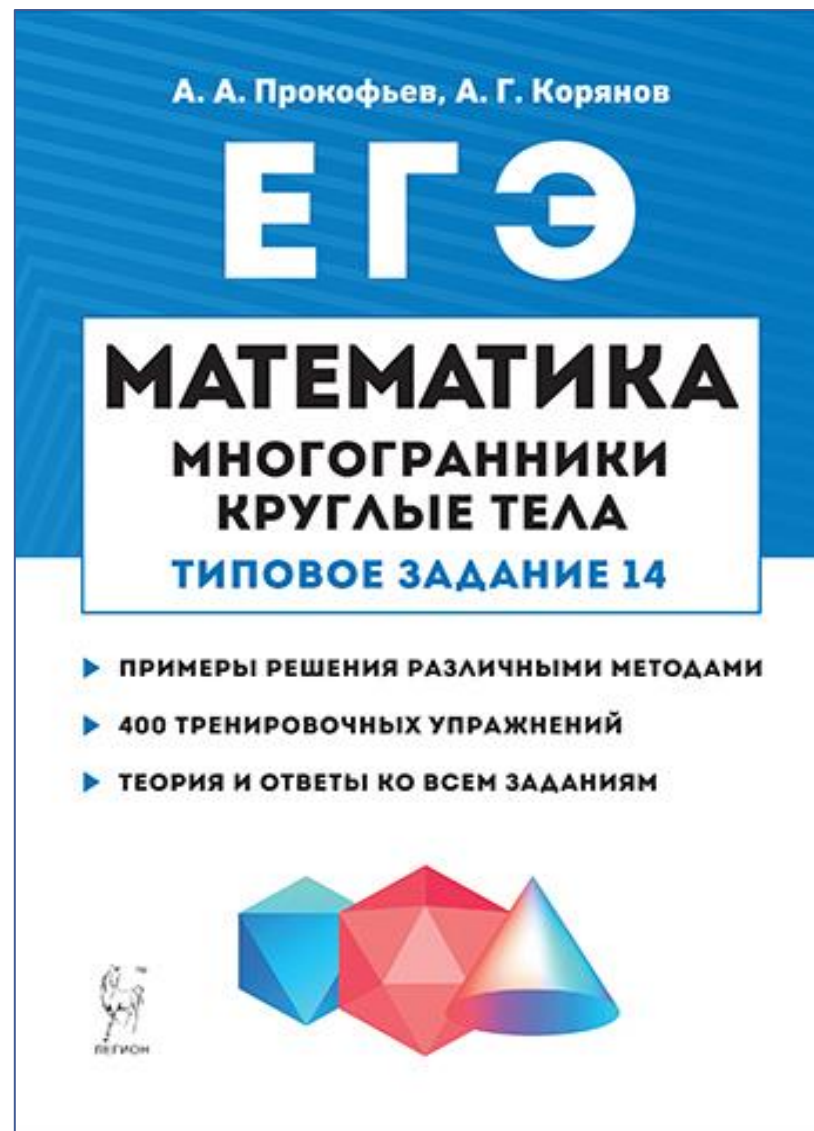
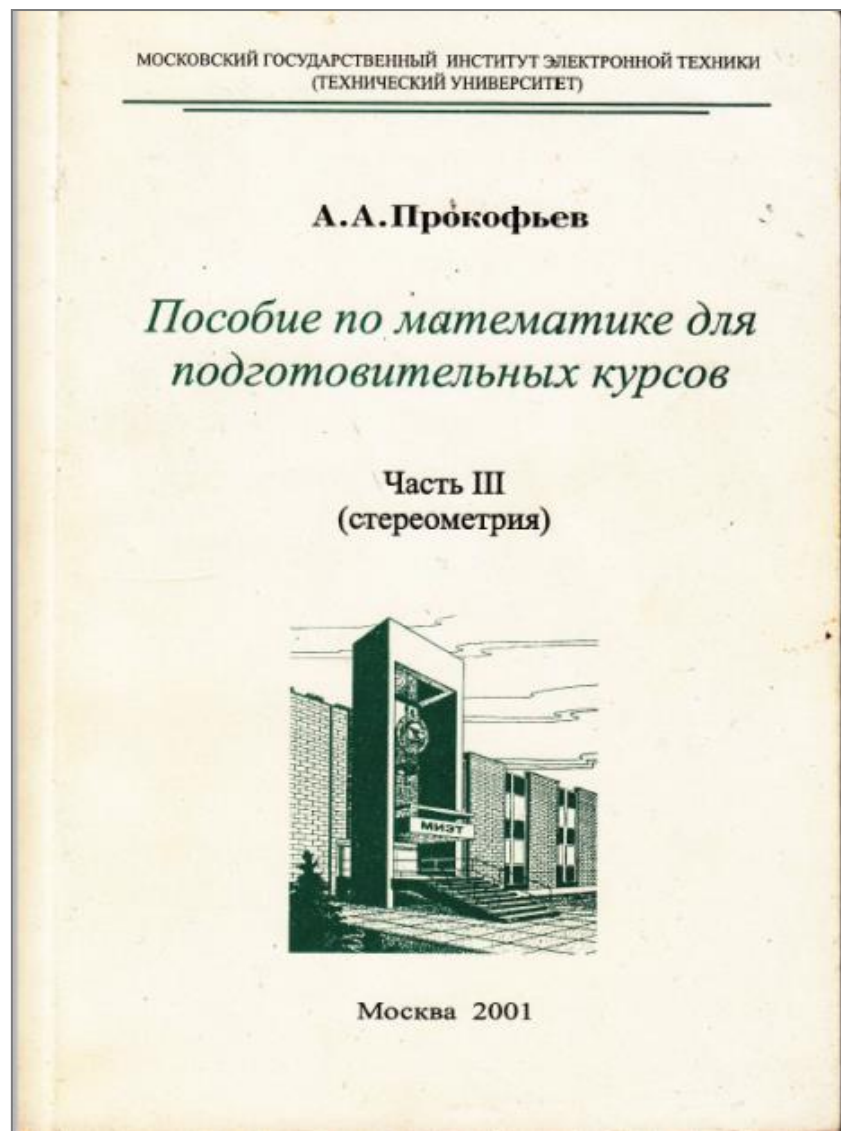
$$\cos \angle(BMN, ABV_1) = |\cos \angle(\vec{n}_{BMN}, \vec{n}_{ABV_1})| = \frac{\left| -\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \right|}{\sqrt{\frac{25}{3} + 1 + 4}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0+0}} = \frac{5}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{40}{3}}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

Ответ $\cos \angle \sqrt{\frac{5}{8}}$.



Ответ отличается от ответа, приведенного в критериях. Там ответ дан через арксинус. Задача эксперта убедиться в совпадении ответов.

ПОСОБИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ



#CITYFOREducation

www.moscowglobalforum.ru